



The Impact of Visual Representation on Solving Mathematical Word Problems: A Comparative Study across Number, Proportion, and Geometry Domains

Majid Haghverdi^{1*} , Maryam Rozbahani² 

1. Department of Mathematics, Ar.C., Islamic Azad University, Arak, Iran.

2. Department of Mathematics, Ar.C., Islamic Azad University, Arak, Iran.

ARTICLE INFO

Received: 2025/11/28

Revised: 2026/06/18

Accepted: 2026/07/12

Keywords:

Mathematical word problems, pictorial representation, content domain, mathematics education, problem-solving.

Abstract

This study compared students' performance in solving mathematical word problems presented in descriptive (verbal) and pictorial (visual) formats. A quasi-experimental design was used, with a within-subjects comparison of formats and a between-subjects comparison of grade levels. The sample comprised 60 female students from sixth-grade elementary and first-cycle secondary school in Borujerd, selected via convenience sampling. A researcher-made test of 21 paired problems across three domains: numbers, ratio, and geometry/measurement (7 each) were used, with each problem presented in both formats. For each participant, 12 problems were randomly assigned as descriptive (Form A) and the rest as pictorial (Form B). Data were analyzed using paired and independent-samples t-tests. Results showed that shifting from descriptive to pictorial representation significantly affected performance ($t = -5.90, p < 0.05$). Elementary students performed better on pictorial problems ($M = 16.5$) than descriptive ones ($M = 10.65$); secondary students showed a similar pattern (pictorial: $M = 14.58$, descriptive: $M = 12.40$). The pictorial advantage was most pronounced in geometry/measurement ($M = 16$ vs. 13), followed by ratio ($M = 10.17$ vs. 14.67) and numbers ($M = 12.42$ vs. 15.67). Findings underscore the effectiveness of pictorial representation, especially in geometric problems, for learning and problem-solving.

Citation: Haghverdi, M., & Rozbehani, M (2026). The Impact of Visual Representation on Solving Mathematical Word Problems: A Comparative Study across Number, Proportion, and Geometry Domains. *Journal of Curriculum Research*, Vol.16, No.1, Ser 31. 255-274, DOI :10.22099/JCR.2026.8873

* Corresponding Author: E-mail address: Majid.Haghverdi@iau.ac.ir



COPYRIGHTS ©2026 The author(s). This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution (CC BY-NC 4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, as long as the Original authors and source are cited. No permission is required from the authors or the publisher

Extended Abstract

Introduction

Mathematical word problems represent one of the most challenging aspects of mathematics education. Over the past 50 years, they have been the focus of extensive research as educators increasingly emphasize the application of mathematical knowledge in real-life situations (Verschaffel et al., 2020; Kilpatrick, 1996; OECD, 1999). The successful solution of mathematical problems requires understanding relationships, recognizing data, and comprehending concepts, where mental-visual representations play a crucial role (Haghverdi & Goya, 2010). Visual representation is one method for presenting mathematical problems. While word problems are often accompanied by images that can enhance understanding, questions remain about whether visual representations are beneficial for the learning process itself (Noori Afshar et al., 2017; Seufert, Jänen & Brünken, 2007). This research examines how changing mathematical word problems from descriptive to visual representation affects student performance across different educational levels (elementary sixth grade and lower secondary) and content domains (numbers, proportions, and geometry).

Theoretical Framework

Visual representations are typically an indirect representation of the real world for students (Beaumont et al., 2017). According to Diezmann and English (2003), visual representation in mathematics education is important for two reasons: it supports reflection of problem data and provides meaning for connecting mathematical ideas. Hegarty and Kozhevnikov (1999) distinguished schematic representation (concrete visualization) from diagrammatic representation (abstract, emphasizing relationships). Elia and Philippou (2004) classified images into four functional types: (1) Decorative images with no connection to the problem; (2) Representational images describing the problem scene; (3) Organizational images providing instructions for problem-solving; and (4) Informational images providing essential

information for understanding or solving the problem.

Methodology

This quasi-experimental study used paired equivalent problems presented in both visual and verbal forms. The sample consisted of 60 female students from Borujerd city (20 sixth-grade elementary 60 and 40 lower-secondary students), selected through convenience sampling. The research instrument comprised 21 paired problems equally distributed across numbers (7), proportions (7), and geometry and measurement (7). Each problem was designed in both descriptive and visual formats. For each student, 12 of the 21 problems were randomly selected as descriptive problems (Version A), while the remaining 9 appeared as visual problems (Version B), presented in random order. Students had 60 minutes to complete the test, with calculator use permitted. Data were analyzed using paired and independent t-tests, with responses scored as incorrect/correct (0 or 1).

Findings

Results showed that changing word problems from descriptive to visual representation significantly affected student performance. Students' average scores in all three content domains were significantly higher in the visual version. The paired t-test confirmed this difference was statistically significant ($t = -5.90$, $p < 0.05$), with a negative Pearson correlation indicating an inverse relationship between descriptive and visual problem difficulty. In elementary school, descriptive problem scores averaged 10.65 (SD=2.39) versus 16.50 (SD=3.14) for visual problems—a difference of 5.85 points. In lower secondary, descriptive scores averaged 12.40 (SD=2.12) versus 14.58 (SD=2.27) for visual problems—a difference of 2.18 points. Independent t-tests confirmed significant performance differences between educational levels ($p < 0.05$). Notably, lower secondary students performed better on descriptive problems due to developed language skills, while elementary students excelled with visual

problems, suggesting stronger visual-spatial thinking at younger ages. Content domain analysis revealed varying effects: In numbers, descriptive scores averaged 10.17 (SD=5.44) versus 14.67 (SD=5.20) for visual—a 4.5-point increase. In proportions, scores were 12.42 (SD=5.48) versus 15.67 (SD=6.92)—a 3.25-point increase. In geometry, scores were 13.00 (SD=5.38) versus 16.00 (SD=4.94). Although the geometry domain showed a 3-point numerical difference, the lower standard deviation in visual problems indicated more stable and consistent effects, aligning with the spatial-visual nature of geometric problems.

Discussion and Conclusion

This research demonstrated that changing problem representation from descriptive to visual significantly improves students' problem-solving ability, consistent with previous research (Azizi Mahmoudabad et al., 2019; Beaumont et al., 2017). Excessive verbal content often negatively affects performance (Boonen et al., 2014; Fuchs et al., 2015), explaining the positive effect of visual representation. A key finding is the differential effect across content domains. Visual representation was most effective in geometry and measurement, consistent with Hoogland et al. (2016) and Schultz et al. (2010), likely due to the spatial-visual nature where visual representation directly supports mental model construction. In proportions, the effect was relatively less, possibly due to inherent complexity requiring quantity-to-whole comparisons. Elementary students benefited more from visual representation, suggesting greater reliance on visual-spatial thinking, while lower secondary students performed better on descriptive problems due to developed language skills. These findings have important implications for designing educational materials: balanced use of descriptive and visual representations according to content domain and educational level can enhance learning and problem-solving. Study limitations include the restriction to female students and convenience sampling. Future research should employ larger, more diverse samples

and qualitative methods such as interviews and think-aloud protocols to investigate factors affecting visual representation effectiveness more deeply.

Keyword: Mathematical word problems, pictorial representation, content domain, mathematics education, problem-solving.



تأثیر بازنمایی تصویری در حل مسائل کلامی ریاضی: مطالعه تطبیقی در حوزه‌های اعداد، نسبت

و هندسه

مجید حق وردی^{۱*}، مریم روزبهانی^۲

۱. دانشیار آموزش ریاضی، واحد اراک، دانشگاه آزاد اسلامی، اراک، ایران.

۲. دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، واحد اراک، دانشگاه آزاد اسلامی، اراک، ایران.

اطلاعات مقاله

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۹/۰۷

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۵/۰۳/۲۸

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۴/۲۱

چکیده

این پژوهش با هدف مقایسه عملکرد دانش‌آموزان در حل مسائل کلامی ریاضی در دو موقعیت توصیفی (کلامی) و تصویری انجام شد. پژوهش از نوع شبه‌تجربی با طرح درون‌آزمودنی برای مقایسه دو موقعیت و طرح بین‌آزمودنی برای مقایسه مقاطع تحصیلی بود. نمونه شامل ۶۰ دانش‌آموز دختر پایه ششم ابتدایی و دوره اول متوسطه شهرستان بروجرد بود که به شیوه در دسترس انتخاب شدند. ابزار پژوهش، آزمونی محقق‌ساخته متشکل از ۲۱ مسئله زوجی در سه حوزه اعداد، نسبت و هندسه و اندازه‌گیری (هر کدام ۷ مسئله) بود که هر مسئله در دو قالب توصیفی و تصویری طراحی شد. برای هر آزمودنی، ۱۲ مسئله به‌صورت تصادفی به‌عنوان نسخه توصیفی (الف) و سایر مسائل به‌عنوان نسخه تصویری (ب) ارائه شد. داده‌ها با آزمون t زوجی و t مستقل تحلیل شدند. نتایج نشان داد تغییر بازنمایی از توصیفی به تصویری تأثیری معنادار بر عملکرد دانش‌آموزان دارد ($p < 0/05$, $t = -5/90$). در دوره ابتدایی، میانگین عملکرد در مسائل تصویری ($M = 5/16$) بیش از توصیفی ($M = 65/10$) بود و در دوره متوسطه نیز الگوی مشابهی مشاهده شد (تصویری: $M = 58/14$ ، توصیفی: $M = 40/12$). همچنین، اثر بازنمایی تصویری در حوزه هندسه و اندازه‌گیری ($M = 16$ در برابر $M = 13$) چشمگیرتر از نسبت ($M = 17/10$ در برابر $M = 67/14$) و اعداد ($M = 42/12$ در برابر $M = 67/15$) بود. یافته‌ها بر کارآمدی بازنمایی تصویری، به‌ویژه در مسائل هندسی، در بهبود یادگیری و حل مسئله تأکید دارد.

واژه‌های کلیدی:

مسائل کلامی، بازنمایی تصویری، حوزه محتوایی، آموزش ریاضی، حل مسئله

استناد: حق وردی، م و روزبهانی، م (۱۴۰۵). تأثیر بازنمایی تصویری در حل مسائل کلامی ریاضی: مطالعه تطبیقی در حوزه‌های اعداد، نسبت و هندسه. مجله علمی پژوهشی «پژوهش‌های برنامه‌درسی» انجمن مطالعات برنامه‌درسی ایران. دوره شانزدهم، شماره اول، پیاپی ۳۱، بهار و تابستان ۱۴۰۵.

۲۷۴-۲۵۵. ۱۴۰۵

DOI:10.22099/JCR.2026.8873

*. نویسنده مسئول: Majid.Haghverdi@iau.ac.ir



COPYRIGHTS ©2026 The author(s). This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution (CC BY-NC 4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, as long as the Original authors and source are cited. No permission is required from the authors or the publisher

مقدمه

مسائل کلامی یکی از دشوارترین مسائلی است که فراگیران ریاضی با آن مواجه‌اند. این مسائل به عنوان یکی از مهمترین راهبردهای حل مسئله در ریاضی، از موضوعاتی است که همواره مورد مناقشه بوده و به همین علت سبب شده تا موضوعات اغلب پژوهش‌ها در طی ۵۰ سال اخیر حول محور مسائل کلامی باشد (Verschaffel, Schukajlow & et al, 2020). در بسیاری از پژوهش‌های آموزش ریاضی تمرکزی ویژه بر چگونگی استفاده از دانش و مهارت‌های ریاضی شده است (Kilpatrick, 1996؛ OECD, 1999؛ Toner, 2011) و از این رو نیاز روزافزونی به مواد و ابزار برای آموزش و ارزیابی استفاده از دانش و مهارت ریاضیات در موقعیت‌های زندگی واقعی وجود دارد. برای دهه‌ها، استفاده از مسائل کلامی برای آموزش و ارزیابی توانایی‌های دانش‌آموزان برای حل مسائل در موقعیت‌های عملی روزمره رایج بوده است (Haghverdi, 2014). در طول پنجاه سال گذشته موقعیت‌های زندگی واقعی به گونه‌ای فزاینده در کلاس‌های درس ریاضیات مدرسه استفاده شده است. چندین پیشرفت در آموزش ریاضی وجود دارد که این روند را به جلو سوق داده است. نخست اینکه، معلمان ریاضی درخواستی برای تأکید بیشتر در ریاضیات مدرسه بر روش‌های استفاده از ریاضیات در زندگی روزمره دارند (Kilpatrick, 1996؛ OECD, 1999؛ Toner, 2011).

کیلپاتریک (۱۹۹۶) مشاهده کرده است که «برنامه درسی از تأکید بر ساختارهای انتزاعی به سمت تلاش‌هایی برای گنجاندن کاربردهای واقعی تر و روش‌هایی که در آن از ریاضیات در زندگی روزمره و حرفه ای استفاده می‌شود، تغییر مکان داده است» (Kilpatrick, 1996). دوم؛ استفاده‌ای فزاینده از مثال‌هایی از واقعیت به عنوان بخشی جدایی ناپذیر از یک نظریه دستورالعمل برای ریاضیات وجود دارد. به عنوان مثال، در آموزش ریاضی واقعی^۱ (RME) (Freudenthal, 1973؛ Gravemeijer, 1999, 2004؛ Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014) زمینه‌ها، مدل‌ها و بازنمایی‌ها نقشی مهم در فرآیند آموزشی دارند. ایده اصلی در RME این است که دانش‌آموزان باید با حمایت معلم و مواد درسی (مثلاً کتاب‌های درسی) در ابداع دوباره ریاضیات پشتیبانی شوند. نقطه شروع چنین فرآیندهای ابداعی و نو باید از نظر تجربی برای دانش‌آموزان واقعی باشد. مسائلی که در زمینه‌های زندگی روزمره قرار دارند اغلب این نیاز را برآورده می‌کنند. از این رو، در RME، موقعیت‌های زندگی واقعی فقط برای آماده کردن دانش‌آموزان برای حل مسائل کاربردی استفاده نمی‌شود. کارکرد اصلی موقعیت‌های زندگی واقعی در RME ارائه یک مبنای مفهومی برای آفرینشی نو از ریاضیاتی است که دانش‌آموزان یاد می‌گیرند. تحولات ذکر شده در مورد کاربرد، آموزش، حل مسئله و مدل‌سازی را می‌توان به عنوان شاخه‌های یک درخت بزرگ‌تر دید که نشان‌دهنده رابطه ظریف بین واقعیت و ریاضی و متعاقباً نحوه بازنمایی واقعیت در تمرین‌های کلاس درس است. در نتیجه این پیشرفت‌ها، در تمرین‌های کلاسی شاهد نمونه‌ها و مسائل بسیار زیادی از زندگی واقعی هستیم که به عنوان تکلیف مطرح می‌شوند. شکل غالبی که برای آنها استفاده می‌شود مسائل کلامی است که بیش از همه از نمایش توصیفی واقعی استفاده می‌کند (Madison, B. L., & Steen, 2008؛ Sriraman & et al, 2006). دشواری‌های گزارش شده با مسائل کلامی به قدری پایدار است که این مطالعه در نظر دارد برای مسائل کلامی به عنوان ابزاری برای ارزیابی توانایی‌های دانش‌آموزان برای حل مسائل کمی در موقعیت‌های عملی روزمره متناسب با واقعیت‌های آموزشی که دانش آموز فراگرفته است را مورد بررسی قرار دهد. بنابراین، این پژوهش با این هدف انجام شد که تغییر موقعیت مسائل کلامی ریاضی از توصیفی به تصویری در دو

^۱- Realistic Mathematics Education

مقطع ابتدایی (پایه ششم) و دوره اول متوسطه در حوزه‌های اعداد، نسبت‌ها، اندازه‌گیری و هندسه، چه تاثیر بر عملکرد دانش‌آموزان در حل این مسایل دارد.

پیشینه نظری و چارچوب پژوهش

حل موفقیت‌آمیز مسئله ریاضی، مستلزم درک روابط ریاضی موجود در مسئله، شناخت داده‌ها و درک مفاهیم و روابط ریاضی در آن است که استفاده از بازنمایی‌های ذهنی - بصری در آن، اهمیت دارند (Haghverdi & Goya, 2010). این فرایند نه صرفاً یک فعالیت محاسباتی، بلکه یک فعالیت شناختی پیچیده است که مستلزم ساخت مدل ذهنی منسجم از موقعیت مسئله می‌باشد. از منظر نظریه‌های پردازش اطلاعات، حل مسئله زمانی اثربخش است که یادگیرنده بتواند بازنمایی بیرونی مسئله را به بازنمایی درونی معنادار تبدیل کند و میان ساختار سطحی و ساختار عمیق آن تمایز قائل شود. در این چارچوب، بازنمایی‌های ذهنی - بصری به عنوان سازوکارهای سازمان‌دهنده شناختی عمل می‌کنند که امکان یکپارچه‌سازی داده‌های عددی، روابط کمی و ساختار موقعیتی را فراهم می‌آورند.

دویندت-کینگ و گلدین (۲۰۰۳) در تعریف بازنمایی اذعان داشتند که به هر ساختاردهی و پیکربندی از ویژگی‌ها و صفات متمایز، تصاویر، اشکال و اهداف عینی که انعکاس‌دهنده محتوا و مفاد یک موضوع است، بازنمایی گفته می‌شود (DeWindt-King & Goldin, 2003). این تعریف، بازنمایی را نه یک ابزار جانبی بلکه بخشی از نظام معناپردازی می‌داند. از منظر رویکرد سازنده‌گرایی شناختی، بازنمایی‌ها بستر تعامل فعال فرد با محتوا را فراهم می‌کنند و از راه آن، دانش به صورت تدریجی سازمان می‌یابد. بنابراین، کیفیت بازنمایی می‌تواند کیفیت استدلال ریاضی را تعیین کند.

روش‌های گوناگونی برای بازنمایی مسائل ریاضی وجود دارد. یکی از این روش‌ها، بازنمایی تصویری است. مسائل کلامی اغلب با تصاویر همراه هستند. البته، تصاویرها می‌توانند محدود به سرگرمی بوده و تصاویری آموزنده برای حصول پاسخ صحیح نباشند. اغلب ادعا می‌شود که این تصاویر مهارت‌های حسابی را به صورت کلی بهبود می‌دهند. هرچند این سؤال هم مطرح است که آیا بازنمایی‌های تصویری برای خود فرایند یادگیری هم سودمند هستند؟ (Nori afshr & Seufert, Jänen & Brünken, 2006; Crisp & Sweiry, 2007; Parmar & Signer, 2005; Bisanz, 2005; Rasmussen).

این پرسش به شکاف نظری مهمی اشاره دارد: تمایز میان «اثر انگیزشی تصویر» و «اثر شناختی تصویر». بر اساس نظریه بار شناختی، تصاویر در صورتی سودمند هستند که موجب کاهش بار شناختی بیرونی و تسهیل سازماندهی اطلاعات شوند؛ در غیر این صورت ممکن است موجب پراکندگی توجه و افزایش بار شناختی غیرضروری گردند. همچنین، مطابق نظریه دوکدگذاری، هم‌زمانی پردازش کلامی و تصویری می‌تواند موجب تقویت رمزگذاری دوگانه و یادسپاری پایدارتر شود، مشروط بر آنکه هم‌راستایی معنایی میان متن و تصویر برقرار باشد.

بازنمایی‌های تصویری معمولاً یک شکل از نمایش غیرمستقیم جهان واقعی برای دانش‌آموزان است (Beaumont, Mudd, Turner & Barnes, 2017). در نتیجه، تصاویر می‌توانند نقش واسطه‌ای میان تجربه عینی و انتزاع ریاضی ایفا کنند و به فرایند مدل‌سازی ذهنی کمک نمایند. به نقل از دیزمان و انگلیش (۲۰۰۳) در آموزش ریاضی، بازنمایی تصویری از دو جهت مهم است: نخست اینکه یک نقش حمایتی در انعکاس داده‌های مسئله دارد و دوم اینکه معنا و مفهومی برای ارتباط ایده‌های ریاضی است؛ به‌طوری‌که بازنمایی‌های تصویری ابزاری مهم برای یادگیری ریاضی و حل مسئله است (Diezmann & English, 2003). این دیدگاه با چارچوب «بازنمایی‌های چندگانه» همسو است که بیان می‌کند

یادگیری عمیق زمانی رخ می‌دهد که یادگیرنده بتواند میان بازنمایی‌های گوناگون (کلامی، نمادین، تصویری، نموداری) ترجمه انجام دهد.

بررسی بازنمایی‌های گرافیکی نشان داد که مسائل کلامی همراه با تصاویر، دارای تنوعی گسترده‌تر هستند. این تنوع نه تنها در سطح ظاهری بلکه در سطح کارکرد شناختی نیز قابل تحلیل است. از نظر ماهیت بازنمایی، هگارتی و کوژونیکف (۱۹۹۹) بازنمایی نموداری را از بازنمایی طرحواره‌ای متمایز کرده‌اند. در بازنمایی طرحواره‌ای تجسم عینی اشیاء و اعمالی که در درون مسئله ظاهر می‌شوند امکان‌پذیر است و نوع نموداری ماهیت انتزاعی‌تری دارند که بر روابط مهم در مسئله تأکید می‌کنند (Hegarty & Kozhevnikov, 1999). این تمایز از منظر نظریه پردازش دوسطحی اهمیت دارد زیرا بازنمایی‌های طرحواره‌ای بیشتر با ساختار سطحی مسئله مرتبط‌اند، در حالی که بازنمایی‌های نموداری به استخراج ساختار عمیق و روابط ریاضی کمک می‌کنند.

از نظر کاربرد تصاویر، طبقه‌بندی تصاویر طرحواره‌ای در چهار نوع در درون یک دسته‌بندی پرکاربرد صورت می‌گیرد (Elia & Philippou, 2004):

- تصاویر تزئینی: تصاویری هستند که هیچ نوع ارتباطی با مسئله یا راه‌حل آن ندارند؛ آنها به سادگی صفحه را تزئین می‌کنند. این تصاویر ممکن است اثر انگیزشی داشته باشند اما معمولاً در سطح شناختی کم‌اثر یا حتی مخل هستند.

- تصاویر نمایشی: تصاویری هستند که بخشی از مسئله یا همه آن را شرح می‌دهند؛ به عنوان مثال، با ارائه تصویری که صحنه توصیف‌شده در مسئله را یا بخش خاصی از آن را به تصویر می‌کشد. این نوع تصاویر می‌توانند درک موقعیتی را تسهیل کنند، اما الزاماً روابط کمی را برجسته نمی‌سازند.

- تصاویر سازمانی: دستورالعمل‌هایی را برای طراحی یا کار نوشتاری ارائه می‌دهند که از روش حل مسئله پشتیبانی می‌کند. این تصاویر در سطح راهبردی عمل می‌کنند و می‌توانند فرایندهای فراشناختی مانند برنامه‌ریزی و نظارت را تقویت کنند.

- تصاویر اطلاعاتی: که اطلاعات ضروری برای فهمیدن و یا حل مسئله را ارائه می‌کند، مانند اطلاعات عددی که در صورت مسئله ارائه نشده است (Verschaffel, Schukajlow et al., 2020). این نوع تصاویر به دلیل هم‌پوشانی مستقیم با ساختار ریاضی مسئله، بیشترین ظرفیت را برای بهبود عملکرد حل مسئله دارند.

بسیاری از انواع بازنمایی‌های بصری در کتاب‌های درسی ریاضی استفاده می‌شود، اما همه آنها حاوی اطلاعات ریاضی مرتبط نیستند. پژوهش‌های اندکی به طور مستقیم به اثرات انواع گوناگون بازنمایی‌ها بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان می‌پردازد. این وضعیت نشان‌دهنده شکافی مهم در ادبیات پژوهش است زیرا در حالی که کتاب‌های درسی مملو از بازنمایی‌های بصری‌اند، شواهد تجربی نظام‌مند درباره کارآمدی افتراقی انواع گوناگون تصاویر محدود است. نظریه‌ها، دیدگاه‌هایی متفاوت در مورد اینکه چگونه بازنمایی‌های بصری مانند تصاویر بر یادگیری دانش‌آموز تأثیر می‌گذارند، ارائه می‌کنند. کتاب‌های درسی ریاضی از طیف گسترده‌ای از نمایش‌های بصری از جمله نمودارها، جداول، نمودارها، تصاویر تزئینی و عکس‌ها استفاده می‌کنند. با توجه به استفاده مکرر دانش‌آموزان از کتاب‌های درسی و تعداد زیاد بازنمایی‌های بصری در این کتاب‌های درسی، درک اینکه چگونه انواع گوناگون نمایش‌های بصری بر حل مسئله و یادگیری تأثیر می‌گذارند بسیار مهم است. این ضرورت زمانی برجسته‌تر می‌شود که بدانیم بازنمایی‌ها می‌توانند هم نقش تسهیل‌کننده و هم نقش بازدارنده در یادگیری ایفا کنند.

ساختن یک بازنمایی گرافیکی از یک مسئله کلامی معین توسط خود فرد باید به عنوان یک استراتژی رهیافتی در نظر گرفته شود که حل‌کننده مسئله با هدف کاهش سطح دشواری تکلیفی که باید حل شود، به کار می‌گیرد؛ به بیان دیگر، قرار دادن مسئله کلامی (ریاضی) نه تنها به صورت متنی بلکه به صورت گرافیکی نیز می‌تواند به عنوان یک تصمیم آموزشی توسط نویسنده کتاب درسی یا معلم با هدف تسهیل فرآیند حل مسئله به هر روش صورت پذیرد (Haghverdi, 2014, Verschaffel, 2016, Haghverdi and Wiest, 2016). این رویکرد با چارچوب «مدل‌سازی شناختی» همسو است که بیان می‌کند بازنمایی گرافیکی می‌تواند ساختار رابطه‌ای مسئله را آشکار کرده، بار حافظه فعال را کاهش دهد و امکان پردازش عمیق‌تر را فراهم آورد. در نتیجه، بررسی نظام‌مند نقش انواع بازنمایی‌های تصویری در مسائل کلامی نه تنها از منظر توصیفی بلکه از منظر تبیینی و علی ضروری است زیرا می‌تواند به توسعه مدل نظری یکپارچه‌ای درباره تعامل متن، تصویر و فرایندهای شناختی در حل مسئله ریاضی منجر شود.

روش پژوهش

در این پژوهش، متغیر مستقل «نوع بازنمایی مسئله کلامی ریاضی» در دو سطح تعریف شده است: (الف) **بازنمایی توصیفی/کلامی** که از نظر مفهومی به ارائه صرفاً متنی یک مسئله ریاضی اشاره دارد؛ در این حالت دانش‌آموز باید بدون کمک تصویری بیرونی، یک مدل ذهنی از موقعیت مسئله بسازد. از نظر عملیاتی، این سطح در این پژوهش با «نسخه الف» مطابقت دارد که مسئله تنها به صورت نوشتاری ارائه شده است. (ب) **بازنمایی تصویری** که از نظر مفهومی به همراهی متن مسئله با یک عنصر بصری (نمودار، شکل هندسی یا مدل بصری مانند مدل میله‌ای) اشاره دارد که هدف آن، برون‌سپاری بخشی از فرایند ساخت مدل ذهنی به یک بازنمایی بیرونی است. از نظر عملیاتی، این سطح با «نسخه ب» مطابقت دارد. این دو سطح بر اساس چارچوب نظری (Lesh et al., 1987; Janvier, 1987) «بازنمایی‌های چندگانه در ریاضیات صورت‌بندی شده‌اند که بر نقش ترجمه و تبدیل میان بازنمایی‌های کلامی، تصویری، نمادین و موقعیت‌های واقعی در یادگیری ریاضی تأکید دارد. متغیر وابسته پژوهش، «عملکرد دانش‌آموز در حل مسئله کلامی ریاضی» است که از نظر مفهومی به توانایی دانش‌آموز در درک، بازنمایی ذهنی و اجرای عملیات ریاضی لازم برای رسیدن به پاسخ صحیح یک مسئله کلامی اشاره دارد. از نظر عملیاتی، این متغیر با نمره‌ای که دانش‌آموز در هر سؤال کسب کرده (۰ در صورت پاسخ نادرست، ۱ در صورت پاسخ صحیح) و در نهایت، با نمره کل وی در هر یک از دو نسخه (توصیفی/تصویری) سنجیده شده است. افزون بر این، متغیر «مقطع تحصیلی» (ششم ابتدایی در مقابل دوره اول متوسطه) و متغیر «حوزه محتوایی ریاضی» (اعداد، نسبت‌ها، هندسه و اندازه‌گیری) به عنوان متغیرهای طبقه‌بندی‌کننده در نظر گرفته شدند تا امکان بررسی تفاوت اثر بازنمایی در زیرگروه‌های گوناگون فراهم شود.

در این مطالعه تمرکز بر بازنمایی از مسائل ریاضی و موقعیت‌های زندگی واقعی در کلاس درس در قالب تصویری است که با استفاده از مسائل زوجی همسان شامل بیان همزمان مسئله به صورت تصویری و همچنین، کلامی و بازخورد میزان توانایی دانش‌آموزان در رویارویی با آنهاست. جامعه آماری این پژوهش، دانش‌آموزان ششم ابتدایی و متوسطه اول در سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ می‌باشد که تعداد آنها بر اساس جدول زیر می‌باشد:

جدول ۱. جامعه آماری به تفکیک مقطع دانش‌آموزان

مقطع	تعداد	درصد
دختران ابتدایی	۵۳۶	۲۵/۵
دختران متوسطه اول	۱۵۳۳	۷۴/۵
جمع کل	۲۰۵۹	۱۰۰

در این پژوهش از روش نمونه‌گیری در دسترس استفاده شد. آزمون طراحی شده به صورت حضوری در تعدادی از مدارس دولتی دخترانه شهرستان بروجرد (شامل مدارس ابتدایی پایه ششم و مدارس متوسطه اول) اجرا شد و به عنوان یک ابزار تشخیصی برای سنجش عملکرد یادگیرندگان در حل مسائل ریاضی مورد استفاده قرار گرفت. در مجموع، ۲۰۱۰ دانش‌آموز از ۲۵ مدرسه در سطح منطقه در آزمون شرکت کردند که این تعداد حدود ۲۵ درصد از کل جمعیت دانش‌آموزی منطقه را تشکیل می‌داد. از میان آنان، ۶۰ دانش‌آموز (۲۰ نفر از مقطع ابتدایی و ۴۰ نفر از مقطع متوسطه اول) بر اساس دسترسی و تمایل به شرکت در مطالعه، برای تحلیل اصلی پژوهش انتخاب شدند. تحلیل داده‌ها در دو سطح توصیفی و استنباطی انجام شد. در سطح توصیفی، مقادیر میانگین و انحراف معیار نمرات دانش‌آموزان در حل مسائل با دو نوع بازنمایی (کلامی و تصویری) محاسبه شد.

در سطح استنباطی، دو نوع آزمون مورد استفاده قرار گرفت:

۱. آزمون t زوجی^۲: برای مقایسه عملکرد هر دانش‌آموز در دو نسخه از مسائل زوجی — نسخه «الف» (کلامی) و نسخه «ب» (تصویری) - به منظور بررسی تأثیر نوع بازنمایی بر حل مسئله؛ زیرا هر شرکت‌کننده هر دو نوع سؤال را پاسخ داده بود.
۲. آزمون t مستقل^۳: برای مقایسه تفاوت عملکرد بین دو گروه تحصیلی (ابتدایی و متوسطه اول) که مستقل از یکدیگر بودند.

واحد تحلیل در تمامی آزمون‌ها نمره کل هر دانش‌آموز در هر نوع بازنمایی بود.

در نسخه اولیه، برای بررسی روابط عمیق‌تر میان متغیرهای پژوهش، از رگرسیون لجستیک نیز استفاده شده بود، اما با توجه به نوع داده‌ها و تمرکز تحلیل بر تفاوت میان میانگین‌ها، گزارش اصلی بر آزمون‌های t استوار شد و نتایج مدل لجستیک در این مقاله ارائه نشده است. به همین دلیل در نسخه نهایی مقاله تنها آزمون‌های t زوجی و مستقل به عنوان ابزار تحلیل آماری معرفی می‌شوند.

اجرای آزمون

طراحی این ابزار بر مبنای چارچوب نظری پژوهش و با الهام از مطالعات پیشین در زمینه بازنمایی‌های تصویری در حل مسائل کلامی، به‌ویژه پژوهش‌های هوگلند و همکاران (۲۰۱۶) و هگارتی و کوژونیکف (۱۹۹۹) صورت گرفت. طراحی مسائل بر اساس چارچوب «بازنمایی‌های چندگانه در ریاضیات» (Janvier, 1987; Lesh et al., 1987) انجام شد که بر ترجمه و تبدیل بین بازنمایی‌های گوناگون - از جمله کلامی، تصویری، نمادین و موقعیت‌های واقعی — در یادگیری

^۱ به دلیل ماهیت حضوری و محدودیت‌های اجرایی، نمونه‌گیری به روش در دسترس انجام شد؛ بنابراین تعمیم نتایج باید با احتیاط صورت گیرد.

^۲ Paired Samples t-test

^۳ Independent Samples t-test

و حل مسئله ریاضی تأکید دارد. این چارچوب با حوزه‌های محتوایی مشخص شده در استانداردهای شورای ملی معلمان ریاضیات آمریکا (NCTM) نیز همسو است. هر زوج مسئله به گونه‌ای طراحی شد که از نظر ساختاری همسان باشند؛ این هم‌ارزی ساختاری در مرحله طراحی اولیه آیت‌ها توسط اساتید راهنما و مشاور پژوهش بررسی و تأیید شد و در ادامه، همان‌گونه که در بخش روایی و پایایی ابزار آمده است، توسط پنل متخصصان و در یک مطالعه پایلوت نیز مورد بازبینی قرار گرفت. همچنین، عملیات ریاضی مورد نیاز، سطح دشواری محاسباتی و زمینه مسئله یکسان بودند، اما تنها در قالب بازنمایی متفاوت بودند:

نسخه الف (توصیفی/کلامی): مسئله تنها به صورت متن ارائه شده و دانش‌آموز باید ذهناً یک مدل بصری از موقعیت بسازد.

نسخه ب (تصویری): همان مسئله همراه با نمودار، شکل هندسی یا مدل بصری (مانند مدل‌های میله‌ای برای مسائل نسبت یا اشکال هندسی برای تکالیف اندازه‌گیری) ارائه شده است.

مسائل از برنامه درسی ملی ریاضیات ایران (پایه‌های ششم تا هشتم) اقتباس و با توجه به سطح رشدی دانش‌آموزان تنظیم شدند. این مسائل به طور مساوی در حوزه‌های محتوایی اعداد، نسبت‌ها، و هندسه توزیع شدند. برای هر مسئله، دو نسخه طراحی شد: نسخه الف به بیان صرفاً کلامی مسئله و نسخه ب، به ارائه همزمان مسئله به صورت کلامی همراه با تصاویر یا نمودارهای مرتبط می‌پردازد. نمره‌گذاری پاسخ‌ها توسط پژوهشگر و سپس توسط یکی از دبیران با مدرک کارشناسی ارشد ریاضی به صورت مستقل انجام شد تا پایایی ارزیابی‌ها تضمین شود. استفاده از ماشین حساب در طول آزمون مجاز بود.

روش و ابزار پژوهش

ابزار پژوهش یک آزمون محقق‌ساخته شامل ۲۱ زوج مسئله (در مجموع ۴۲ آیت) بود که در سه حوزه محتوایی ریاضی طراحی شد: اعداد (۷ مسئله)، نسبت‌ها (۷ مسئله) و هندسه و اندازه‌گیری (۷ مسئله) (جدول ۱). بدین ترتیب، هر زوج مسئله دارای محتوای ریاضی یکسان، اما دو نوع بازنمایی متفاوت بود. در طراحی ابزار تلاش شد متغیرهای مداخله‌گر تا حد امکان کنترل شود؛ از جمله تعداد واژه‌های به کار رفته در نسخه‌های کلامی و تعداد عناصر تصویری در نسخه تصویری (شامل تصویر اصلی و یادداشت‌های جانبی). این کنترل به منظور آن انجام شد که تفاوت در عملکرد دانش‌آموزان عمدتاً به نوع بازنمایی مسئله (کلامی در مقابل تصویری) نسبت داده شود، نه به تفاوت‌های ساختاری در بیان مسئله.

روایی و پایایی ابزار

برای تأمین روایی محتوایی، ۲۱ زوج مسئله طراحی شده توسط سه نفر از اعضای هیئت علمی رشته آموزش ریاضی و دو نفر از دبیران باتجربه دوره ابتدایی و متوسطه اول بررسی شد. آن‌ها همسویی مسائل با برنامه درسی ملی ریاضیات ایران و تناسب آن‌ها با سطح رشدی دانش‌آموزان پایه‌های ششم تا هشتم را تأیید کردند. بر اساس بازخورد متخصصان، اصلاحات جزئی در عبارت‌بندی برخی مسائل و وضوح تصاویر انجام شد. همچنین، برای تأمین روایی صوری، آزمون به صورت پایلوت بر روی ۱۵ دانش‌آموز (خارج از نمونه اصلی پژوهش) اجرا شد تا وضوح دستورالعمل‌ها و قابل فهم بودن مسائل بررسی شود. دانش‌آموزان گزارش کردند که دستورالعمل‌ها و مسائل به خوبی قابل درک هستند و زمان ۶۰

دقیقه برای پاسخ‌گویی مناسب است. در خصوص پایایی، با توجه به نمره‌گذاری دوگانه (۰ یا ۱) و ماهیت عینی معیارهای نمره‌دهی، ضرایب پایایی رسمی (مانند آلفای کرونباخ) محاسبه نشد. با این حال، برای تضمین پایایی ارزیابی‌ها، نمره‌گذاری پاسخ‌ها توسط پژوهشگر و سپس به‌طور مستقل توسط یک مصحح دوم (دبیر ریاضی با مدرک کارشناسی ارشد) انجام شد. در موارد اختلاف نظر، بحث و توافق صورت گرفت و نمره نهایی تعیین شد. میزان توافق بین دو ارزیاب در نمره‌گذاری اولیه بالای ۹۵ درصد بود که نشان‌دهنده پایایی بالای ابزار است.

۱۶ ب	۱۶ الف
 چند همبرگر می‌توانید با این بسته درست کنید؟ همبرگر	شما یک بسته گوشت چرخ کرده به وزن ۴۹۸ گرم به قیمت ۲۵۰ هزار تومان خریداری می‌کنید. برای درست کردن یک همبرگر به ۸۰ گرم گوشت نیاز دارید چند همبرگر می‌توانید با این بسته درست کنید؟ همبرگر

شکل ۱. نمونه‌ای از مسائل طراحی شده در حوزه اعداد

۱۸ ب	۱۸ الف
 بدهی دولت در یک سال به این سازمان چند میلیون تومان افزایش می‌یابد؟ میلیون تومان	تیتراژ یک روزنامه اخیراً اعلام کرده که بدهی عمومی دولت به یک سازمان در هر دقیقه ۵۰۰ میلیون تومان افزایش پیدا می‌یابد. بدهی دولت در یک سال به این سازمان چند میلیون تومان افزایش می‌یابد؟ میلیون تومان

شکل ۲. نمونه‌ای از مسائل طراحی شده در حوزه اعداد

۸ الف

قیمت معمولی کت شلوار مردانه ۳/۰۰۰/۰۰۰ میلیون تومان است.
اگر در این هفته خرید کنید ۲۵ درصد تخفیف شامل شما می‌شود

شما بابت خرید کت و شلوار در این هفته چقدر باید پرداخت کنید؟

تومان

۸ ب

قیمت کت و شلوار
۳/۰۰۰/۰۰۰ تومان
تا یک هفته
۲۵ درصد تخفیف

شما بابت خرید کت و شلوار در این هفته چقدر باید پرداخت کنید؟

تومان

شکل ۳. نمونه ای از مسائل طراحی شده در حوزه تناسب

فرایند اجرای آزمون

اجرای آزمون به صورت فردی و حضوری برای هر دانش آموز انجام شد. از میان ۲۱ زوج مسئله طراحی شده، برای هر آزمودنی مجموعه‌ای شامل ۲۱ سؤال تهیه شد؛ به گونه‌ای که ۱۲ مسئله در قالب نسخه توصیفی (الف) و ۹ مسئله در قالب نسخه تصویری (ب) ارائه شد. تعیین اینکه کدام مسئله در کدام قالب بازنمایی ارائه شود، برای هر دانش آموز به صورت تصادفی انجام گرفت تا اثر محتوای خاص هر مسئله بر نتایج کلی کاهش یابد. همچنین، در مجموعه سؤالات هر دانش آموز تلاش شد هر سه حوزه محتوایی (اعداد، نسبت‌ها و هندسه و اندازه‌گیری) حضور داشته باشند تا پوشش مناسبی از موضوعات ریاضی فراهم شود. افزون بر این، ترتیب ارائه مسائل در دفترچه آزمون برای هر آزمودنی به صورت تصادفی تنظیم شد (برای مثال: ۵-الف، ۹-ب، ۱۲-الف و ...). تا از بروز اثرات ناشی از ترتیب ارائه سؤال‌ها جلوگیری شود. مدت زمان پاسخ‌گویی به کل آزمون ۶۰ دقیقه تعیین شد. دانش‌آموزان پاسخ‌های عددی خود را در فضای در نظر گرفته شده زیر هر سؤال ثبت می‌کردند و استفاده از ماشین‌حساب برای آنان مجاز بود. پس از پایان آزمون، پاسخ‌ها به طور مستقل توسط پژوهشگر و یک مصحح دوم (دبیر ریاضی با مدرک کارشناسی ارشد) بررسی و نمره‌گذاری شد تا دقت و پایایی نمره‌دهی افزایش یابد.

جدول ۲. ویژگی‌های ۲۱ مسئله زوجی

حوزه محتوایی	مسئله‌ها	شماره مسئله	لفاظی (تعداد کلمات)	پیشچیدگی تصویر (تعداد تصاویر)
اعداد	تلویزیون + دی وی دی	۴	۳۴	۲
	تغییر دادن	۵	۳۱	۲
	انباشته پول	۹	۳۴	۲
	کاشی‌های آشپزخانه	۱۲	۳۱	۲
	همبرگر	۱۶	۲۸	۲
	شریت سرفه	۱۷	۳۹	۲
	بدهی دولت	۱۸	۲۷	۲

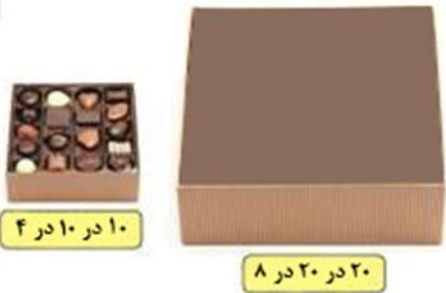
۲	۲۸	۳	زمان سفر	
۱	۳۲	۶	دستور ساندویچ	
۲	۳۰	۷	مجله قیمت	
۲	۲۷	۸	قیمت کت شلوار	نسبت ها
۲	۲۱	۱۰	مدل مقیاس	
۱	۱۴	۱۵	کاهو	
۲	۳۷	۲۰	لاستیک های زمستانی	
۲	۲۳	۱	سیب در جعبه	
۲	۳۰	۲	مصرف بنزین	
۲	۳۲	۱۱	شیشه دو جداره	
۲	۲۸	۱۳	بطری های آب	اندازه گیری و
۳	۲۸	۱۴	کاشی های اتاق خواب	هندسه
۴	۵۳	۲۱	جعبه های شکلات	
۱	۲۵	۱۹	قالب کیک	

۲۱ الف

سارا برای بست بندی مواد جعبه طراحی می کند
او جعبه ای برای شکلات های لوکس به ابعاد ۱۰ سانتیمتر
طول و ۱۰ سانتیمتر عرض با ارتفاع ۴ سانتیمتر طراحی کرد.
سازنده از او می خواهد جعبه ای مشابه طراحی کند اما ابعاد
آن ۲۰ سانتیمتر طول و ۲۰ سانتیمتر عرض و ۸ سانتیمتر
ارتفاع داشته باشد.

حجم جعبه شکلات دوم در مقایسه با جعبه اول چند برابر
بزرگتر است؟

۲۱ ب



حجم جعبه شکلات دوم در مقایسه با جعبه اول چند برابر
بزرگتر است؟

شکل ۴. نمونه از مسائل طراحی شده حوزه هندسه و اندازه گیری

جدول ۳. شرکت کنندگان در پژوهش بر اساس مقاطع ابتدایی و متوسطه اول

مقطع	تعداد	درصد
دختران ابتدایی	۲۰	۳۳/۴
دختران متوسطه اول	۴۰	۶۶/۶
جمع کل	۶۰	۱۰۰

یافته‌ها

شاخص‌های آماری مقایسه تغییر موقعیت مسئله کلامی از توصیفی به تصویری بیانگر این است که میانگین امتیاز تصویری در میان دانش‌آموزان ابتدایی و متوسطه اول بالاتر از میانگین امتیاز توصیفی می‌باشد. نتایج تحلیل آماری نشان داد که تغییر موقعیت مسئله کلامی از بازنمایی توصیفی به تصویری با تفاوتی معنادار در عملکرد دانش‌آموزان در حل مسائل کلامی ریاضی همراه است. همان‌گونه که در جدول ۳ مشاهده می‌شود، میانگین نمرات دانش‌آموزان در هر سه حوزه محتوایی (اعداد، نسبت و هندسه) در نسخه تصویری به طور قابل توجهی بالاتر از نسخه توصیفی بود. نتایج آزمون t زوجی از جدول ۵ نشان داد که این تفاوت از نظر آماری معنادار است ($t = -5/90$ ، $ci = -4/70$ بالا، $ci = -2/23$ پایین، $p < 0/05$) افزون بر این، ضریب همبستگی پیرسون بین نمرات دو نوع بازنمایی منفی و معنادار بود ($p = 0.012$ ، $r = -0.32$)، که نشان‌دهنده رابطه معکوس بین عملکرد دانش‌آموزان در مسائل با بازنمایی توصیفی و تصویری است. این یافته بیانگر آن است که مسائلی که در قالب توصیفی دشوارتر بودند (نمرات پایین‌تر)، در قالب تصویری آسان‌تر شدند و برعکس.

مقایسه عملکرد بر اساس مقطع تحصیلی

تحلیل داده‌ها بر اساس متغیر مقطع تحصیلی نتایجی قابل توجه را نشان داد. در دوره ابتدایی (پایه ششم)، میانگین و انحراف معیار نمرات مسائل توصیفی به ترتیب ۱۰/۶۵ و ۲/۳۹۰ و در نسخه تصویری ۱۶/۵۰ و ۳/۱۳۷ بود. این نشان می‌دهد که دانش‌آموزان دوره ابتدایی در رویارویی با مسائل تصویری عملکردی بهتر داشتند و تفاوت بین دو نوع بازنمایی در این مقطع چشمگیرتر بود (تفاوت میانگین ۵/۸۵: نمره). در دوره متوسطه اول، میانگین نمرات توصیفی ۱۲/۴۰ با انحراف معیار ۲/۱۲۲ و نمرات تصویری ۱۴/۵۸ با انحراف معیار ۲/۲۷۴ بود. اگرچه در این مقطع نیز مسائل تصویری عملکرد بهتری داشتند، اما تفاوت بین دو نوع بازنمایی کمتر از دوره ابتدایی بود (تفاوت میانگین ۲/۱۸: نمره) نتایج آزمون t مستقل از جدول شماره (۵) نشان داد که تفاوت عملکرد بین دو مقطع در هر دو روش بازنمایی معنادار است (روش توصیفی: $t = -2/887$ ، روش تصویری: $t = 2/441$ ، $p < 0.05$)

یافته مهم دیگر این است که دانش‌آموزان دوره متوسطه در مسائل توصیفی عملکرد بهتری نسبت به دانش‌آموزان دوره ابتدایی داشتند، که به احتمال زیاد، به دلیل رشد مهارت‌های زبانی و توانایی درک متن در سنین بالاتر است. در مقابل، در مسائل تصویری، دانش‌آموزان دوره ابتدایی عملکرد بهتری نشان دادند که می‌تواند ناشی از تفکر بصری-فضایی قوی‌تر و وابستگی کمتر به پردازش زبانی در این سنین باشد.

جدول ۴. شاخص‌های آماری مقایسه تاثیر تغییر موقعیت مسئله کلامی از توصیفی به تصویری

مسائل کلامی ریاضی	روش توصیفی		روش تصویری	
	میانگین	انحراف معیار	میانگین	انحراف معیار
امتیاز حوزه اعداد	۱۰/۱۷	۵/۴۴	۱۴/۶۷	۵/۲۰
امتیاز حوزه تناسب	۱۲/۴۲	۵/۴۸	۱۵/۶۷	۶/۹۲
امتیاز حوزه هندسه	۱۳	۵/۳۸	۱۶	۴/۹۴

تحلیل بر اساس حوزه‌های محتوایی

یکی از یافته‌های کلیدی این پژوهش، تفاوت رابطه بازنمایی تصویری با عملکرد در حوزه‌های محتوایی گوناگون ریاضی است. تحلیل داده‌ها نشان داد که شدت تأثیر بازنمایی تصویری به طور معناداری در سه حوزه محتوایی متفاوت است. در حوزه اعداد، میانگین نمرات در روش توصیفی ۱۰/۱۷ (انحراف معیار: ۵/۴۴) و در روش تصویری ۱۴/۶۷، انحراف معیار: ۵/۲۰ بود. این نشان می‌دهد که بازنمایی تصویری در حوزه اعداد با تفاوتی قابل توجه همراه بود و با افزایش ۴/۵ واحدی در میانگین نمرات مشاهده شد. این یافته نشان می‌دهد که تصاویر ممکن است با درک بهتر مفاهیم عددی و عملیات حسابی همراه باشند.

در حوزه نسبت‌ها، میانگین نمرات توصیفی (۱۲/۴۲ انحراف معیار: ۵/۴۸) و تصویری (۱۵/۶۷ انحراف معیار: ۶/۹۲) بود. تفاوت میانگین‌ها در این حوزه ۳/۲۵ واحد است که نسبت به حوزه اعداد کمتر و نسبت به حوزه هندسه ملایم‌تر است. این می‌تواند ناشی از پیچیدگی ذاتی مسائل نسبت باشد که نیازمند درک روابط مقایسه‌ای و تفکر نسبی است؛ بیشترین تفاوت میانگین مرتبط با بازنمایی تصویری در حوزه هندسه و اندازه‌گیری مشاهده شد. در این حوزه، میانگین نمرات توصیفی (۱۳ انحراف معیار: ۵/۳۸) و تصویری (۱۶ انحراف معیار: ۴/۹۴) بود. اگرچه تفاوت میانگین‌ها (۳ واحد) از نظر عددی کمتر از حوزه اعداد است، اما با توجه به انحراف معیار کمتر در نسخه تصویری، نمرات در بازنمایی تصویری در این حوزه یکنواخت‌تر بوده است. این یافته با ماهیت فضایی - بصری مسائل هندسی همخوانی دارد و نشان می‌دهد که بازنمایی تصویری با عملکرد بالاتر در درک روابط فضایی و اندازه‌گیری‌ها همراه است. لذا، یافته‌های این پژوهش را می‌توان در چهار بخش اصلی خلاصه کرد:

الف) تغییر بازنمایی مسائل کلامی از توصیفی به تصویری به طور معناداری عملکرد دانش‌آموزان را در حل مسائل ریاضی بهبود می‌بخشد.

ب) تفاوت عملکرد مرتبط با بازنمایی تصویری در دوره ابتدایی چشمگیرتر از دوره متوسطه است که نشان‌دهنده اهمیت بیشتر تفکر بصری در سنین پایین‌تر است.

ج) رابطه بازنمایی تصویری با عملکرد در حوزه‌های گوناگون محتوایی متفاوت است؛ بیشترین تفاوت میانگین در هندسه و اندازه‌گیری، تفاوت متوسط در اعداد و کمترین تفاوت در نسبت‌ها مشاهده شد.

د) انحراف معیار نمرات در مسائل تصویری عموماً کمتر از مسائل توصیفی است که نشان‌دهنده یکنواختی بیشتر عملکرد دانش‌آموزان در رویارویی با بازنمایی‌های تصویری است.

جدول ۵. نتایج آزمون‌های آماری برای مقایسه عملکرد دانش‌آموزان بر اساس نوع بازنمایی و مقطع تحصیلی

مقایسه	اندازه اثر	95% CI	P	df	t
(Cohen's d)					
بازنمایی تصویری در برابر توصیفی (کل نمونه، زوجی)	۰/۷۶	-۲/۲۳، -۴/۷۰	۰/۰۰۱>	۵۹	-۵/۹۰
مقطع ابتدایی در برابر متوسطه (نسخه توصیفی)	۰/۷۴	-۲/۹۶، -۰/۵۴	۰/۰۵>	۵۸	-۲/۸۸۷
مقطع ابتدایی در برابر متوسطه (نسخه تصویری)	۰/۶۳	۰/۳۵، ۳/۴۹	۰/۰۵>	۵۸	۲/۴۴۱

برای بررسی دقیق‌تر تفاوت عملکرد بر اساس نوع بازنمایی در هر حوزه محتوایی، آزمون‌های t زوجی به‌طور جداگانه برای هر حوزه انجام شد و اندازه اثر با استفاده از Cohen's d محاسبه شد. نتایج در جدول ۶ ارائه شده است. همان‌گونه که در جدول ۶ مشاهده می‌شود، تفاوت معناداری بین دو نوع بازنمایی در هر سه حوزه وجود دارد. بزرگ‌ترین اندازه اثر مربوط به حوزه اعداد است ($d=0.85$) که نشان می‌دهد دانش‌آموزان در مسائل عددی با بازنمایی تصویری عملکردی بهتر داشتند. در حوزه هندسه و اندازه‌گیری اندازه اثر متوسط به بزرگ بود ($d=0.52$)، و در حوزه نسبت‌ها اندازه اثر متوسط مشاهده شد ($d=0.51$).

جدول ۶. مقایسه عملکرد در هر حوزه محتوایی بر اساس نوع بازنمایی

محتوایی	بازنمایی	میانگین	انحراف معیار	انحراف معیار	t	p	Cohen's d	تفاوت میانگین
اعداد	توصیفی	۱۰/۱۷	۵/۴۴	۵/۴۴	-۶/۱۵	<۰/۰۰۱	۰/۸۴	۴/۵۰
	تصویری	۱۴/۶۷	۵/۲۰	۵/۲۰				
نسبت‌ها	توصیفی	۱۲/۴۲	۵/۴۸	۵/۴۸	-۳/۸۸	<۰/۰۰۱	۰/۵۱	۳/۲۵
	تصویری	۱۵/۶۷	۶/۹۲	۶/۹۲				
هندسه و اندازه‌گیری	توصیفی	۱۳	۵/۳۸	۵/۳۸	-۴/۴۲	<۰/۰۰۱	۰/۵۲	۳
	تصویری	۱۶	۴/۹۴	۴/۹۴				

بحث و نتیجه‌گیری

این پژوهش با هدف بررسی تأثیر نوع بازنمایی مسائل کلامی (توصیفی در مقابل تصویری) بر عملکرد دانش‌آموزان انجام شد. یافته‌های به‌دست‌آمده نشان داد که تغییر موقعیت مسئله از توصیفی به تصویری تأثیر معنادار و مثبتی بر توانایی حل مسئله دانش‌آموزان دارد، که با نتایج پژوهش‌های پیشین (Azizi dolatafhn & et al. 2019؛ Boonen, van Wesel, Jolles, & van der Schoot, 2017؛ Lin, Wilson & Cheng, 2013) همسو است. در پژوهش‌های کلی که در مورد تأثیر درک متن بر عملکرد دانش‌آموزان پژوهش‌های انجام گرفته ادعا می‌شود که استفاده زیاد از کلمات در مسئله (لفظی کلامی) اغلب تأثیر منفی بر عملکرد دانش‌آموزان دارد (Boonen, van Wesel, Jolles, & van der Schoot, 2014؛ Fuchs, Fuchs, Compton, Hamlett, & Wang, 2015). نتایج مطالعه هوگلند و همکاران (۲۰۱۶) بر انواع بازنمایی‌ها نشان داد که اثر تغییر افزایش کارایی نسخه تصویری در مقابل سایر نسخه‌ها قابل توجه می‌باشد. بنابر نتایج به‌دست‌آمده این پژوهش، همسو بودن تأثیر آن را می‌توان با پژوهش‌های پیشین مقایسه و مورد توجه قرار داد (Hoogland, 2016). همچنین، سایر

یافته‌ها نشان می‌دهد که میانگین امتیاز مسائل تصویری ریاضی در میان دانش‌آموزان ابتدایی از متوسطه اول بالاتر است، اما میانگین امتیاز توصیفی در میان دانش‌آموزان ابتدایی از متوسطه اول پایین‌تر بوده است.

یافته مهم این پژوهش، تفاوت تأثیر بازنمایی تصویری در حوزه‌های محتوایی گوناگون است. نتایج نشان داد که در حوزه هندسه و اندازه‌گیری، بازنمایی تصویری به طور چشمگیری مؤثرتر از دو حوزه دیگر بود. این یافته با پژوهش هوگلند و همکاران (۲۰۱۶) و شنوتس و همکاران (۲۰۱۰) همخوانی دارد (Schnotz et al, 2016; Hoogland et al, 2010). دلیل این امر را می‌توان در ماهیت فضایی - بصری مسائل هندسی جستجو کرد که بازنمایی تصویری به طور مستقیم از ساخت مدل ذهنی مناسب حمایت می‌کند.

در حوزه نسبت‌ها، تأثیر بازنمایی تصویری نسبتاً کمتر بود که می‌تواند ناشی از پیچیدگی ذاتی این مسائل باشد که همواره نیازمند مقایسه یک کمیت با کل است. همان‌گونه که هوگلند و همکاران (۲۰۱۶) اشاره کرده‌اند، در این نوع مسائل، مدل ذهنی و بازنمایی‌های تصویری ممکن است برای یکدیگر به اندازه کافی سودمند نباشند. این نتایج با یافته‌های مطالعات شنوتس و همکاران (۲۰۱۰) همسو است. در این زمینه پژوهش‌های مورد نظر استدلال می‌کنند در حوزه اعداد، مدل ریاضی در درجه اول محاسباتی و در نتیجه یک بعدی است. در آن مورد فرض بر این بود که یک بازنمایی عمدتاً تصویری کمکی قابل توجه به سهولت حل مسئله در ساخت مدل موقعیتی یا ریاضی ندارد (Hoogland et al, 2016; Schnotz et al, 2010). تفاوت عملکرد دانش‌آموزان در دو مقطع تحصیلی نیز قابل توجه است. دانش‌آموزان دوره ابتدایی از بازنمایی تصویری بیشتر بهره بردند که می‌تواند نشان‌دهنده تکیه بیشتر این گروه سنی بر تفکر بصری-فضایی باشد. در مقابل، دانش‌آموزان دوره متوسطه در مسائل توصیفی عملکرد بهتری داشتند که احتمالاً به دلیل رشد مهارت‌های زبانی و توانایی پردازش متن است.

این یافته‌ها پیامدهایی مهم برای طراحی مواد آموزشی و ارزشیابی در ریاضیات دارد. استفاده متوازن از بازنمایی‌های توصیفی و تصویری ممکن است با یادگیری و حل مسئله بهتر همراه باشد. همچنین، معلمان ریاضی باید از پتانسیل بازنمایی‌های تصویری به‌ویژه در آموزش هندسه و مفاهیم فضایی آگاه باشند.

محدودیت‌های این پژوهش شامل محدود بودن نمونه به دانش‌آموزان دختر و استفاده از روش نمونه‌گیری در دسترس است. پژوهش‌های آتی می‌توانند با استفاده از نمونه‌های بزرگ‌تر و متنوع‌تر و روش‌های کیفی مانند مصاحبه و تفکر بلند، عوامل مؤثر بر تأثیر بازنمایی‌های تصویری را عمیق‌تر بررسی کنند. برای شناسایی همه عواملی که باعث بروز این پدیده می‌شوند، نیازمند انجام پژوهش‌های کیفی مبتنی بر داده‌های عمیق است به‌ویژه اینکه این مطالعات به تمرکز بر بازنمایی‌هایی تصویری به صورت خاص انجام نشده است. بنابراین، می‌تواند ایده خوبی برای پژوهش‌های آتی باشد. از محدودیت‌های این پژوهش، نامتوازن بودن تعداد آیت‌های دو نسخه بازنمایی (۱۲ آیت توصیفی در برابر ۹ آیت تصویری برای هر آزمودنی) است که می‌تواند مقایسه مستقیم نمرات خام را با احتیاط همراه کند؛ اگرچه تخصیص تصادفی و مستقل آیت‌ها به دو نسخه برای هر آزمودنی اثر دشواری ذاتی هر آیت خاص را بین دو شرط توزیع می‌کند. همچنین، اعتبارسنجی هم‌ارزی دشواری و بار شناختی زوج مسائل مبتنی بر قضاوت کارشناسی (استاد راهنما/مشاور و پنل متخصصان) بود، نه شاخص‌های روان‌سنجی کمی مستقل (مانند زمان پاسخ‌گویی یا تحلیل دشواری آیت‌ها بر اساس نظریه سؤال-پاسخ). پژوهش‌های آینده می‌توانند با استفاده از طرح‌های کاملاً متوازن در تعداد آیت‌ها، گزارش نتایج بر مبنای درصد پاسخ صحیح، و سنجش کمی هم‌ارزی دشواری آیت‌ها، این محدودیت‌ها را برطرف کنند.

References

- Azizi Mahmoodabad, M., Liaghatdar, M. J., & Oreyzi, H. R. (2019). Investigating the effectiveness of teaching visual representations on students' ability to solve mathematical word problems. *Curriculum Research*, Iranian Association for Curriculum Studies, 9(2), 200-220. [Persian]
- Beaumont, E. S., Mudd, P., Turner, I. J., & Barnes, K. (2017). Cetacean frustration: The representation of whales and dolphins in picture books for young children. *Early Childhood Education Journal*, 45(4), 545-551.
- Boonen, A. J. H., van Wesel, F., Jolles, J., & van der Schoot, M. (2014). The role of visual representation type, spatial ability, and reading comprehension in word problem solving: An item-level analysis in elementary school children. *International Journal of Educational Research*, 68, 15-26. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2014.08.001>
- Crisp, V., & Sweiry, E. (2006). Can a picture ruin a thousand words? The effects of visual resources in exam questions. *Educational Research*, 48(2), 139-154.
- DeWindt-King, A. M., & Goldin, G. A. (2003). Children's visual imagery: Aspects of cognitive representation in solving problems with fractions. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 2(1), 1-42.
- Diezmann, C. M., & English, L. D. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The role of representation in school mathematics* (pp. 77-89). National Council of Teachers of Mathematics.
- Elia, I., & Philippou, G. (2004). The functions of pictures in problem solving. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 327-334). Bergen University College.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Reidel.
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Compton, D. L., Hamlett, C. L., & Wang, A. Y. (2015). Is word-problem solving a form of text comprehension? *Scientific Studies of Reading*, 19(3), 204-223. <https://doi.org/10.1080/10888438.2015.1005745>
- Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. CD-β Press / Freudenthal Institute.
- Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(2), 155-177. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0102_4
- Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 105-128. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_3
- Haghverdi, M. (2014). Characteristics of mathematical word problems in middle school and strategies for facilitating the process of solving them. *Theory and Practice in Curriculum*, Iranian Association for Curriculum Studies, 3, 25-46. [Persian]
- Haghverdi, M., & Gooya, Z. (2010). The effect of using the draw-a-picture strategy on solving mathematical word problems. *Theory and Practice in Curriculum*, Iranian Association for Curriculum Studies, 14, 261-294. [Persian]
- Haghverdi, M., & Wiest, L. R. (2016). The effect of contextual and conceptual rewording on mathematical problem-solving performance. *The Mathematics Educator*, 25(1), 56-73.
- Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 91(4), 684-689. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.91.4.684>
- Hoogland, K. (2016). *Images of numeracy: Investigating effects of visual representations of problem situations in contextual mathematical problem solving* (Doctoral dissertation). Eindhoven University of Technology.
- Hoogland, K., Pepin, B., Bakker, A., de Koning, J., & Gravemeijer, K. (2016). Representing contextual mathematical problems in descriptive or depictive form: Design of an instrument and validation of its uses. *Studies in Educational Evaluation*, 50, 22-32. <https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2016.06.005>
- Hoogland, K., & Pepin, B. (2017). The intricacies of assessing numeracy: Investigating alternatives to word problems. *Adults Learning Mathematics: An International Journal*, 11(2), 14-26.
- Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Kilpatrick, J. (1996). Introduction to section 1: Curriculum, goals, contents, resources. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 7-9). Kluwer.
- Lesh, R., Post, T., & Beher, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Lawrence Erlbaum Associates.

- Lin, Y. H., Wilson, M., & Cheng, C. L. (2013). An investigation of the nature of the influences of item stem and option representation on student responses to a mathematics test. *European Journal of Psychology of Education*, 28(4), 1141–1161.
- Madison, B. L., & Steen, L. A. (2008). *Calculation vs. context: Quantitative literacy and its implications for teacher education*. Mathematical Association of America.
- Noori Afshar, M., Haghverdi, M., & Komijani, A. (2017). Multiple representations in education: A reflection of real experiences. *New Approach in Educational Administration Quarterly*, 8(3), Serial No. 31, Autumn 2017. [Persian]
- OECD. (1999). *PISA mathematics framework*. OECD.
- PIAAC Numeracy Expert Group. (2009). *PIAAC numeracy: A conceptual framework*. OECD. <https://doi.org/10.1787/220337421165>
- Rasmussen, C., & Bisanz, J. (2005). Representation and working memory in early arithmetic. *Journal of Experimental Child Psychology*, 91(2), 137–157. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2005.01.004>
- Schnotz, W., Baadte, C., Müller, A., & Rasch, R. (2010). Creative thinking and problem solving with depictive and descriptive representations. In L. Verschaffel, E. De Corte, T. de Jong, & J. Elen (Eds.), *Use of representations in reasoning and problem solving: Analysis and improvement* (pp. 11–35). Routledge.
- Seufert, T., Jänen, I., & Brünken, R. (2007). The impact of intrinsic cognitive load on the effectiveness of graphical help for coherence formation. *Computers in Human Behavior*, 23(3), 1055–1071.
- Sigler, L. E. (2002). *Fibonacci's Liber Abaci: A translation into modern English of Leonardo Pisano's book of calculation*. Springer.
- Sriraman, B., Kaiser, G., & Blomhøj, M. (2006). A brief survey of the state of mathematical modeling around the world. *ZDM – Mathematics Education*, 38(3), 212–213. <https://doi.org/10.1007/BF02652805>
- Toner, P. (2011). *Workforce skills and innovation* (OECD Education Working Papers). OECD.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 521–525). Springer.
- Van Garderen, D. (2006). Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities. *Journal of Learning Disabilities*, 39(6), 496–506. <https://doi.org/10.1177/00222194060390060201>
- Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (Eds.). (2000). *Making sense of word problems*. Swets & Zeitlinger.
- Verschaffel, L., Depaepe, F., & Van Dooren, W. (2014). Word problems in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 641–645). Springer.
- Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: A review (M. Haghverdi & M. Roozbahani, Trans.). *Roshd-e Amoozesh-e Riazhi [Growth of Mathematics Education]*, 143, Winter 2024. [Persian]
- Zaslavsky, C. (1999). *Africa counts: Number and pattern in African cultures*. Lawrence Hill.
- Zevenbergen, R., & Zevenbergen, K. (2009). The numeracies of boatbuilding: New numeracies shaped by workplace technologies. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7(1), 183–206. <https://doi.org/10.1007/s10763-007-9104-9>

