



Investigating Misconceptions in Probability Among Undergraduate Preservice Teachers in Elementary Education

Nadia Shamel^{*1},  Ebrahim Reyhani² , Mojtaba Eskandari³ 

1. Master of Science in Mathematics Education, Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran.
2. Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Shahid Rajaee Teacher.
3. PhD student in Mathematics Education, Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran.

Received: 2025/02/12

Revised: 2025/03/17

Accepted: 2025/05/05

Keywords:

probability, misconception, elementary education, preservice teacher.

Abstract

The present study aimed to investigate the understanding and misconceptions of undergraduate preservice teachers in elementary education regarding the topic of probability. A descriptive survey method was employed. The statistical population included all undergraduate preservice teachers in elementary education in the provinces of Tehran, Markazi, and North Khorasan during the second semester of the 1401–1402 academic year. A total of 122 participants were selected using convenience sampling. Initially, existing misconceptions in the field of probability were identified and classified. Based on the study objectives and the opinions of experienced teachers, six common misconceptions were selected. Test questions were then designed or adapted to assess these misconceptions. The measurement tool was a researcher-developed test consisting of 10 probability-related questions. Its validity was confirmed by mathematics education professors and experienced mathematics teachers, and reliability was assessed using Cronbach's alpha, yielding a coefficient of 0.7. The findings indicated that all six identified misconceptions were present among the preservice teachers in the sample. The misconceptions, ranked from highest to lowest prevalence, were: (1) inability to enumerate all possible and desirable outcomes, (2) representativeness bias, (3) misunderstanding part-to-part and part-to-whole relationships, (4) outcome approach, (5) misunderstanding proportionality, and (6) reliance on intuition (visual effect) when comparing probabilities.

Citation: Shamel, N., Reyhani, E., & Eskandari, M. (2025). Investigating Misconceptions in Probability Among Undergraduate Preservice Teachers in Elementary Education. *Journal of Curriculum Research*, Vol.15, No.1, Ser 29. 47-72

* Corresponding Author: E-mail address: (nashamel23@gmail.com)

Extended Abstract

Introduction

Humans frequently encounter situations involving uncertainty in daily life, such as business investments, meteorology, medicine, and disease treatment. Probability, as a mathematical concept, helps individuals understand and reason about uncertain events, making it an essential part of the curriculum in many countries, including Iran. Despite its importance, probability education faces significant challenges, particularly misconceptions that negatively affect learners' understanding. Misconceptions are systematic, recurring errors that arise under specific conditions. Identifying and addressing these misconceptions is crucial for ensuring correct learning in probability.

Teachers play a critical role in students' learning, and their knowledge can directly influence the formation of misconceptions. Since probability is introduced in elementary school, examining the misconceptions of preservice teachers in this field is particularly important, as these misconceptions may be transferred to future students.

Research Question

What misconceptions do undergraduate preservice teachers in elementary education have regarding probability?

Methods

This descriptive survey study targeted all undergraduate preservice teachers in elementary education in Tehran, Markazi, and North Khorasan provinces during the second semester of the 1401–1402 academic year. The sample consisted of 122 participants selected using convenience sampling.

Initially, existing misconceptions in probability were identified and categorized. Based on the study objectives and the input of experienced mathematics teachers, six common misconceptions were selected, and test questions were designed or adapted to assess these misconceptions. The measurement tool was a researcher-developed test consisting of 10 probability-

related questions. Validity was confirmed by mathematics education professors and experienced teachers, and reliability was assessed using Cronbach's alpha ($\alpha = 0.7$), indicating acceptable reliability.

Results

All six identified misconceptions were present among the preservice teachers. Ranked from highest to lowest prevalence, the misconceptions were:

1. Inability to enumerate all possible and desirable outcomes
2. Representativeness bias
3. Misunderstanding part-to-part versus part-to-whole relationships
4. Outcome-based reasoning
5. Misunderstanding proportion
6. Reliance on intuition (visual effect) when comparing probabilities

Additionally, some participants exhibited misconceptions related to equiprobability and reliance on personal experience. These findings align with previous studies by Kahaki et al. (2019) and Konold et al. (1993).

Discussion and Conclusion

Goya and Hessam (2007) note that individuals organize knowledge into interconnected schemas, and the quality of learning depends on how effectively new material is related to these schemas. The findings of this study suggest that misconceptions such as errors in part-to-part probability calculations, misapplication of ratio and proportion rules, and the inability to enumerate outcomes may stem from incomplete or distorted schemas or inadequate understanding of fractions and ratios among preservice teachers. Misconceptions may also arise from schema interference or retrieval errors, especially in combinatorics and probability comparison tasks.

Given that undergraduate mathematics curricula emphasize recognizing and addressing misconceptions, it is recommended that professors design activities to help preservice teachers identify and correct their own misconceptions and prepare to address these issues in future students. Curriculum designers should also

incorporate probability-focused exercises that specifically target common misconceptions.

Finally, probability education remains underexplored in mathematics education research. Future studies could investigate strategies for improving probability instruction, examine teachers' understanding of probability and their approaches to correcting misconceptions, and explore methods for enhancing students' ability to enumerate possible and desirable outcomes.

Keywords: Probability, Misconception, Elementary Education, Preservice Teachers



بdfهفمی‌های حوزه احتمال: عاملی مهم در عملکرد دانشجومعلممان دوره کارشناسی رشته آموزش ابتدایی در موقعیت‌های احتمالاتی

نادیا شامل^{۱*} ID، ابراهیم ریحانی^۲ ID، مجتبی اسکندری^۳ ID

۱. کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران.
۲. دانشیار گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران.
۳. دانشجوی دکتری آموزش ریاضی، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران.

تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۱۱/۲۴ تاریخ دریافت مقاله نهایی: ۱۴۰۳/۱۲/۲۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۲/۱۵

واژه‌های کلیدی:

احتمال، بdfهفمی، آموزش ابتدایی، دانشجومعلم

چکیده

هدف این پژوهش که به روش توصیفی از نوع زمینه‌یابی انجام شده، بررسی درک و فهم و بdfهفمی‌های دانشجومعلممان دوره کارشناسی رشته آموزش ابتدایی در مبحث احتمال است. جامعه آماری این پژوهش کلیه دانشجومعلممان دوره کارشناسی رشته آموزش ابتدایی در سه استان تهران، مرکزی و خراسان شمالی بودند که در نیم‌سال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲ تحصیل می‌کردند. نمونه مورد مطالعه ۱۲۲ نفر از افراد جامعه بودند که به عنوان نمونه در دسترس انتخاب شدند. در این پژوهش، ابتدا بdfهفمی‌های شناسایی شده در حوزه احتمال مطالعه و طبقه‌بندی شد. سپس، با توجه به هدف پژوهش و بر اساس نظر تعدادی از معلمان با تجربه، ۶ بdfهفمی رایج‌تر انتخاب و بر اساس آن‌ها به طراحی یا اقتباس سؤالات آزمون برای گروه نمونه اقدام شد. بنابراین، ابزار اندازه‌گیری در این پژوهش، آزمونی محقق‌ساخته شامل ۱۰ سؤال از مبحث احتمال بود. روایی این آزمون توسط تعدادی از اساتید آموزش ریاضی و معلمان ریاضی مجرب تأیید شد. پایایی این آزمون با روش آلفای کرونباخ مورد بررسی قرار گرفت و ضریب ۰/۷ بدست آمد. یافته‌های پژوهش نشان داد که هر شش بdfهفمی مورد مطالعه در این پژوهش، در بین دانشجومعلمان گروه نمونه وجود داشته است. این موارد به ترتیب میزان شیوع بیشتر به کم‌تر، در میان دانشجومعلمان، عبارتند از: ۱. عدم توانایی نوشتن تمام حالات ممکن و مطلوب، ۲. معرف بودن، ۳. عدم درک مفهوم جزء به جزء و جزء به کل، ۴. رویکرد نتیجه، ۵. عدم درک نسبت و تناسب و ۶. استفاده از شهود (اثر بصری) در مقایسه احتمال.

استناد: شامل، ن.، ریحانی، ا.، و اسکندری، م. (۱۴۰۴). بdfهفمی‌های حوزه احتمال: عاملی مهم در عملکرد دانشجومعلممان دوره کارشناسی رشته آموزش ابتدایی در موقعیت‌های احتمالاتی. مجله علمی پژوهشی «پژوهش‌های برنامه درسی» انجمن مطالعات برنامه درسی ایران. دوره پانزدهم، شماره اول، پیاپی ۲۹، بهار و تابستان ۱۴۰۴. ۴۷-۷۲

مقدمه

بی‌تردید از دیرباز تصمیم‌گیری‌هایی که در آن‌ها عدم اطمینان وجود دارد، بخش جدایی‌ناپذیر از زندگی هر شخصی بوده است. برای مثال، در پیش‌بینی‌های هواشناسی، جمله احتمال بارش باران را بارها شنیده‌ایم؛ ممکن است پزشک‌انی که انجام عمل جراحی را توصیه می‌کنند، بگویند: «احتمال» موفقیت‌آمیز بودن عمل جراحی، ۹۰ درصد است. واژه‌هایی مانند بعید، ممکن، محتمل و ... در موقعیت‌هایی بکار می‌رود که نمی‌توان نتیجه قطعی را از قبل تعیین کرد. از آنجایی که بسیاری از اطلاعات پیرامون ما به صورت احتمالی بیان می‌شود و نظریه احتمال می‌تواند به ما در درک بهتر عدم قطعیت کمک کند، آمار و احتمال به کانون توجه بسیاری از کشورها تبدیل شده است و در برنامه‌های آموزش ریاضی و استانداردهای یادگیری سازمان‌های آموزشی پیشرو گنجانده شده است (Arıcan & Kuzu, 2019). شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا^۱ در کتاب اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای (2000) به موضوع احتمال به عنوان یکی از استانداردهای محتوایی آموزش ریاضی، می‌پردازد. هم‌چنین، برنامه درسی ایران نیز از این قاعده مستثنا نیست و در سند برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران احتمال به عنوان یکی از قلمروهای حوزه آموزش ریاضی بشمار می‌رود (ص ۳۴).

با وجود حضور احتمال در اسناد برنامه درسی کشورهای گوناگون جهان، بسیاری از کودکان و بزرگسالان تصورات نادرستی در مورد احتمال دارند (Jones & Tarr, 2007). از آنجایی که معلمان یکی از عوامل مؤثر در یادگیری دانش‌آموزان هستند؛ یکی از دلایل بدفهمی در مورد احتمال می‌تواند دانش معلمان باشد. مطالعات نشان داده‌اند که بدفهمی‌های معلمان نه تنها باعث تقویت بدفهمی‌های دانش‌آموزان می‌شود بلکه اصلاح این باورها را نیز به دلیل ماهیت انتزاعی احتمال، دشوارتر می‌کند (Chernoff & Sriraman, 2014; Batanero et al, 2016). Batanero & Diaz (2012) بر این باورند که تغییر در آموزش احتمال در مدارس به آمادگی صحیح معلمان بستگی دارد. از طرفی وضعیت تدریس آمار و احتمال برای معلمان ابتدایی چالش برانگیزتر از معلمان ریاضی است چرا که تعداد کمی از آن‌ها آموزش مناسبی در زمینه احتمالات نظری یا کاربردی داشته‌اند و دوره‌های آمار مقدماتی سنتی، دانش پداگوژی مورد نیاز را در اختیار آن‌ها قرار نمی‌دهد. در این خصوص، Hokor (2020) ابراز می‌دارد که بمنظور تدریس مؤثر احتمال در مدارس، برنامه درسی آمار و احتمال برای دانشگاه‌های آموزش و پرورش باید دانشجومعلم‌ان را در مرکز فرایند تدریس و یادگیری قرار دهد. اگرچه بسیاری از واحدهای ریاضی طراحی شده برای دانشجومعلم‌ان موضوعات احتمال را در بر می‌گیرد، اما این بدان معنا نیست که برنامه‌های آموزش دانشجومعلم‌ان به اندازه کافی معلمان جدید را برای آموزش این مفاهیم آماده می‌کنند (Dollard, 2011).

بنابراین می‌توان گفت یکی از راه‌های بهبود کیفیت آموزش احتمال در مدارس، این است که اطمینان حاصل شود نومعلمانی که از دانشگاه فرهنگیان فارغ التحصیل می‌شوند، درک خوبی از مفاهیم اساسی احتمال دارند. گفتنی است موضوع احتمال در ایران از دوره ابتدایی آغاز می‌شود و بعضاً چالش‌هایی که دانش‌آموزان در پایه‌های بالاتر با آن‌ها مواجه می‌شوند به سطح و کیفیت یادگیری آن‌ها در دوره ابتدایی باز می‌گردد. معلمانی که در دوره ابتدایی موضوع احتمال را تدریس می‌کنند، افزون بر اینکه خودشان نباید در این موضوع بدفهمی داشته باشند، ضروری است با بدفهمی‌هایی که در این حوزه وجود دارد آشنا باشند تا با طراحی سؤالات و فعالیت‌های مناسب مانع از شکل‌گیری این

^۱. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)

بدفهمی‌ها در دانش‌آموزان شده و یا بدفهمی‌های ایجاد شده را برطرف کنند. از آن‌جا که بررسی بدفهمی‌های احتمالاتی دانشجومعلم‌ان رشته آموزش ابتدایی، موضوعی است که کم‌تر مورد توجه پژوهشگران حوزه آموزش ریاضی در کشور قرار گرفته است، پژوهشگران این مطالعه، بر آن شدند تا به بررسی درک و بدفهمی‌های دانشجومعلم‌ان دوره کارشناسی رشته آموزش ابتدایی از مفهوم احتمال بپردازند. در نتیجه سؤال زیر هدایتگر این پژوهش است:

سؤال پژوهش

دانشجومعلم‌ان دوره کارشناسی رشته آموزش ابتدایی در حوزه احتمال دارای چه بدفهمی‌هایی هستند؟

مبانی پژوهش

مبانی نظری

چالش‌های آموزش احتمال

احتمال به عنوان یکی از حوزه‌های ریاضیات، به دلیل سودمندی برای زندگی روزمره، نقش ابزاری آن در سایر رشته‌ها، نیاز به دانش تصادفی مقدماتی در بسیاری از حرفه‌ها و نقش مهم استدلال احتمالاتی در تصمیم‌گیری، دارای اهمیت است (Batanero & Diaz, 2012). با وجود اهمیت احتمال، پژوهش‌ها در مورد درک و توسعه احتمالات نشان می‌دهد که کودکان و بزرگسالان هنگام حل مسائل احتمال و یادگیری ایده‌های احتمالاتی با مشکلاتی روبه‌رو می‌شوند (Kvatinisky & Even, 2002). توسعه رسمی احتمال با تناقض‌های زیادی همراه است که تفاوت بین شهود و رسمی شدن ریاضی را در این زمینه نشان می‌دهد. نتایج متناقض با شهود^۱ در احتمال، حتی در سطوح بسیار ابتدایی نیز یافت می‌شوند. برای مثال، این واقعیت که اگر هنگام [چهار بار] پرتاب یک سکه، چهار رو بدست آید، بر احتمال اینکه سکه بعدی منجر به رو شود، تأثیری ندارد، خلاف تصور است (Batanero & Diaz, 2012). یکی دیگر از چالش‌ها این است که نظریه‌های احتمال بیش‌تر قابل توضیح هستند و نمی‌توان آن‌ها را مانند شاخه‌های گوناگون ریاضیات (مانند هندسه، جبر و...) در مراحل مقدماتی اثبات کرد. برای مثال، در جبر می‌توان با مطالعه دقیق الگوی اعدادی مانند ۲، ۴، ۶، ۸، ۱۰، ... عبارت‌های بعدی را پیش‌بینی کرد، اما در احتمال، اگر در پنج بار پرتاب یک سکه پنج رو ظاهر شود، به این معنی نیست که پرتاب ششم رو خواهد بود (Hokor, 2020).

چالش دیگر عدم برگشت‌پذیری آزمایش‌های تصادفی است؛ یعنی هنگام تکرار یک آزمایش نمی‌توانیم دوباره نخستین نتیجه را بدست آوریم (Batanero & Diaz, 2012)، اما درک این موضوع که پرتاب سکه را نمی‌توان معکوس کرد تا نتایج یکسانی در شرایط یکسان ایجاد شود، برای دانش‌آموزان دشوار است (Hokor, 2020). یکی دیگر از چالش‌ها این است که معلمان با مفهوم احتمال نسبت به مطالب دیگر ریاضیات کم‌تر آشنا هستند. در واقع مشکل این است که اغلب، احتمال به‌عنوان موضوع دست دوم تلقی می‌شود (Rakes, 2010 cited in Kahaki et al, 2019). بیش‌تر معلمان تجربه کمی در مورد احتمال، از دوران تحصیل خود یا آموزش پیش از خدمت خود داشته و یا هیچ تجربه‌ای در این زمینه ندارند. آن‌ها از توانایی‌های خود برای آموزش احتمالات مطمئن نیستند، فکر می‌کنند که آموزش آن دشوار است و عدم قطعیت موجود در فعالیت‌های عملی مربوط به احتمال برای آن‌ها خوشایند نیست (Stohl, 2005).

^۱. Counterintuitive

چالش دیگری که آموزشگران در تدریس مبحث احتمال با آن روبه‌رو هستند، بdfهفمی‌هایی است که درک یادگیرندگان از احتمال را تحت تأثیر قرار می‌دهد. شواهدی وجود دارد که نشان می‌دهد افراد در سنین گوناگون، بdfهفمی‌های احتمالاتی را حفظ می‌کنند که ریشه‌کن کردن آن‌ها تنها با آموزش رسمی موضوع، دشوار است (Batanero & Diaz, 2012). در واقع، پیش‌ارزیابی دانش‌آموزان به تعیین شهودها و بdfهفمی‌های آن‌ها کمک می‌کند و این موارد باید در تصمیم‌گیری‌های آموزشی در نظر گرفته شوند (Odafe, 2011). از این رو ریشه‌یابی و رفع مشکلات و بdfهفمی‌ها می‌تواند به یادگیری صحیح افراد از مبحث احتمال، کمک کند.

ماهیت بdfهفمی و بdfهفمی‌های حوزه احتمال

Michael (2002) بdfهفمی را به عنوان ناسازگاری بین مفهومی که ما می‌خواهیم دانش‌آموزان یاد بگیرند و مدل ذهنی‌ای که در ذهن خود می‌سازند، تعریف می‌کند. هم‌چنین، Olivier (1989) بین لغزش‌ها^۱، اشتباهات^۲ و بdfهفمی‌ها^۳ تمایز قائل است و بیان می‌دارد که لغزش‌ها پاسخ‌های نادرست ناشی از پردازش هستند؛ آن‌ها نظام‌مند^۴ نیستند، اما بdfهفمی‌ها پاسخ‌های نادرست ناشی از برنامه‌ریزی هستند؛ آن‌ها نظام‌مندند زیرا به طور منظم در شرایط یکسان اعمال می‌شوند. اشتباهات نشانه‌های ساختارهای مفهومی زیربنایی هستند. این باورها و اصول زیربنایی در ساختار شناختی است که علت اشتباهات مفهومی نظام‌مند است که Olivier آن را بdfهفمی می‌نامد. Graeber & Johnson (1991) بdfهفمی‌ها را در چهار گروه قرار می‌دهند: بیش‌تعمیمی (دانش‌آموز مفهوم یا رویه‌ای را که در یک وضعیت درست است به وضعیتی دیگر تعمیم می‌دهد)، بیش‌تخصیصی (دانش‌آموز محدودیتی را که ویژگی یک مفهوم، یا رویه نیست، به آن نسبت می‌دهد)، ترجمه‌ی نادرست (دانش‌آموز در ترجمه‌ی واژگان، نمادها، جداول یا نمودارها به یکدیگر اشتباه می‌کند)، مفهوم‌سازی محدود (ریشه بdfهفمی دانش‌آموز به عدم درک مفهوم یا رویه برمی‌گردد) (Cited Bakhshalizadeh & Boroujerdian, 2017).

در بررسی علل شکل‌گیری بdfهفمی‌ها باید اظهار داشت که افراد دانش را در واحدهای بزرگی از مفاهیم مرتبط، سازمان و ساختار می‌دهند. این ایده‌های به هم مرتبط در ذهن فرد، طرح‌واره نامیده می‌شود. چنین طرح‌واره‌هایی در حافظه ذخیره می‌شوند و می‌توان آن‌ها را بازایی و استفاده کرد و یادگیری اساساً شامل تعامل بین طرح‌واره‌ها و ایده‌های جدید است (Olivier, 1989). از این رو کیفیت یادگیری افراد، به کیفیت ساختار طرح‌واره‌های قبلی و توانایی آن‌ها در مرتبط کردن مطالب تازه با آن طرح‌واره‌ها برای ساختن طرح‌واره ذهنی مربوط به مفهوم جدید بستگی دارد (Goya & Hesam, 2007). احتمال به عنوان یکی از حوزه‌های ریاضی از جمله موضوعاتی است که برخی یادگیرندگان در فراگیری آن دچار بdfهفمی هستند. Hirsch & O'Donnell (2001) ابراز می‌دارند که دانش‌آموزان، اغلب قوانین احتمالات را درک نمی‌کنند و از طریق تجربیات غیررسمی خارج از کلاس، بdfهفمی‌هایی را شکل می‌دهند. مطالعات زیادی به بررسی و شناسایی بdfهفمی‌های دانش‌آموزان و دانشجویان در حوزه احتمال پرداخته‌اند که نتایج متنوعی به همراه داشته است. در ادامه تعدادی از بdfهفمی‌های شناخته شده در این مبحث معرفی و برای روشن شدن چیستی آن‌ها، مثال‌هایی ارائه شده است. هم‌چنین، به برخی از پژوهش‌هایی که به هر یک از بdfهفمی‌های یاد شده پرداخته‌اند، اشاره شده است.

¹. slips

². errors

³. misconceptions

⁴. systematic

۱. **عدم درک مفهوم جزء به جزء و جزء به کل:** با افراز^۱ (جداسازی) یک کمیت گسسته یا پیوسته به قسمت‌های هم‌اندازه و در نظر گرفتن قسمت‌هایی از آن، کسر به عنوان جزئی از کل حاصل می‌شود (Doosti & Reyhani, 2015). گاهی دانش‌آموزان به جای ساخت کسر جزء به کل در محاسبه احتمال، از کسر جزء به جزء استفاده می‌کنند. برای مثال در کیسه‌ای ۴ مهره آبی و ۱۰ مهره قرمز وجود دارد. مهره‌ای از این کیسه بر می‌داریم. احتمال اینکه از این کیسه مهره آبی خارج شود چه قدر است؟ پاسخ دانش‌آموز: $\frac{4}{10}$ است (Kahaki et al, 2019).

۲. **عدم توانایی در مقایسه کسرها:** بعضی دانش‌آموزان بر این باورند که از میان دو کسر، کسری که مخرج کوچکتری دارد بزرگ‌تر است. برای مثال کدام یک از گزینه‌های زیر احتمال رخ‌داد بیش‌تری دارند؟ الف) از کیسه‌ای شامل ۱ مهره قرمز و ۴ مهره آبی، مهره آبی خارج شود. ب) در پرتاب یک تاس مضرب ۳ بیاید. پاسخ دانش‌آموز: چون $\frac{4}{3} > \frac{1}{5}$ ، بنابراین گزینه ب احتمال رخ‌داد بیش‌تری دارد (Azimpour & Vahedi, 2021).

۳. **عدم درک نسبت و تناسب:** احتمال خارج شدن مهره سیاه از یک کیسه $\frac{11}{12}$ است. اگر این کیسه ۱۸۰ مهره داشته باشد تقریباً چند مهره سیاه دارد؟ پاسخ دانش‌آموز: چون از ۱۲ حالت ۱۱ حالت آن اتفاق می‌افتد بنابراین، از ۱۸۰ مهره ۱۷۹ مهره آن سیاه است (Kahaki et al, 2019).

۴. **عدم توانایی نوشتن تمام حالات ممکن و مطلوب در فضای نمونه‌ای:** در یک خانواده با سه فرزند احتمال داشتن دو پسر و یک دختر چه قدر است؟ پاسخ دانش‌آموز: فضای نمونه برابر است با ۴ حالت: سه پسر، دو پسر و یک دختر، دو دختر و یک پسر، سه دختر. در حالی که پاسخ درست ۸ حالت است. این موارد عبارتند از: {(پ،پ،پ)، (پ،پ،د)، (پ،د،پ)، (پ،د،د)، (د،پ،پ)، (د،پ،د)، (د،د،پ)، (د،د،د)} (Li & Mendoza, 2002; Kahaki et al, 2019; Mirzaeian, 2020).

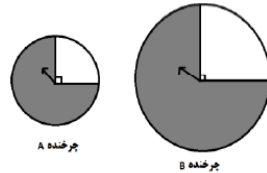
۵. **رویکرد نتیجه^۲:** در این بدفهمی دانش‌آموزان احتمالاتی که به صفر نزدیک است را غیرممکن و آن‌هایی که به ۱۰۰ درصد نزدیک است را حتمی می‌دانند و تنها برای پیشامدهایی که احتمالی نزدیک به ۵۰ درصد دارند، عدم قطعیت در نظر می‌گیرند. برای مثال، احتمال قبول شدن در درس ریاضی یک آموزشگاه $\frac{11}{12}$ است. اگر این آموزشگاه ۱۸۰ دانش‌آموز داشته باشد که همگی در امتحان ریاضی شرکت کرده‌اند. تقریباً چند نفر قبول می‌شوند؟ پاسخ دانش‌آموز: همه قبول می‌شوند زیرا احتمال قبول شدن نزدیک به ۱ است (Konold, 1989; Li & Mendoza, 2002; Kahaki et al, 2019).

۶. **عدم درک صحیح واژگان پیوستار احتمال:** این بدفهمی به معنای عدم تمایز بین «ممکن» و «غیرممکن»، عدم تمایز بین «ممکن» و «حتمی» و عدم تمایز بین «غیرممکن» و «حتمی» است. برای مثال، یک تاس شش‌وجهی را یکبار پرتاب می‌کنیم. عبارت مناسب مقابل آن را انتخاب کنید. عدد رو آمده، عدد زوج است. (غیرممکن، ممکن، حتمی). پاسخ دانش‌آموز: حتماً عدد ۲ می‌آید چون عدد ۲ در تاس وجود دارد (Li & Mendoza, 2002; Kahaki et al, 2019).

^۱. Partitioning

^۲. Outcome approach

۷. قضاوت‌های ذهنی^۱: الف) استفاده از شهود (اثر بصری)^۲ در مقایسه احتمال: به این معنا است که عمدتاً به دلیل ویژگی‌های فیزیکی مانند اندازه، وزن چرخنده‌ها یا موقعیت شروع عقربه و غیره، یک نتیجه خاصی اتفاق خواهد افتاد. برای مثال، عقربه هر یک از چرخنده‌های شکل ۱ را می‌چرخانیم. احتمال توقف عقربه در قسمت سیاه در چرخنده A را با چرخنده B مقایسه کنید.



شکل ۱. چرخنده‌های A و B

پاسخ دانش‌آموز: از آن جا که چرخنده B سطح بزرگتری دارد و هر دو چرخنده یک قدرت دارند ممکن است عقربه چرخنده B در قسمت سیاه باشد، ولی عقربه چرخنده A از قسمت سیاه گذشته باشد (Li & Mendoza, 2002; Kahaki et al, 2019). تجربه یا تفسیر شخصی: مردم دوست دارند از تجربیات شخصی خود که هیچ ارتباطی با قوانین و مفاهیم ریاضی ندارد برای مقایسه و محاسبه احتمال استفاده کنند. برای مثال، در کیسه A، ۱۵ مهره قرمز و ۵ مهره آبی و در کیسه B ۱۵۰ مهره قرمز و ۵۰ مهره آبی وجود دارد. مهره‌های کیسه را مخلوط می‌کنیم و یک مهره از هر کیسه بیرون می‌آوریم. احتمال برداشتن مهره آبی از کدام کیسه بیش‌تر است؟ پاسخ دانش‌آموز: احتمال برداشتن مهره آبی از کیسه A بیش‌تر است چرا که کیسه A فقط ۲۰ مهره دارد درحالی‌که کیسه B ۲۰۰ مهره، یعنی ۱۰ برابر کیسه A مهره دارد. بنابراین بیرون کشیدن آنچه خواسته شده از کیسه B خیلی سخت است (Konold, 1989; Li & Mendoza, 2002; Batanero & Borovcnik, 2016).

۸. هم‌احتمالی^۳: دانش‌آموزان تمایل دارند پیشامدها را هم‌احتمال در نظر بگیرند بدون اینکه اشاره‌ای به هم‌احتمال بودن پیشامدها شده باشد. برای مثال، یک تاس شش‌وجهی را یکبار پرتاب می‌کنیم. عبارت مناسب مقابل آن را انتخاب کنید. عدد رو آمده ۳ است (ناممکن، ممکن، حتمی). پاسخ دانش‌آموز: دو حالت وجود دارد. ۳ می‌آید یا ۳ نمی‌آید. احتمال هر دوی آن‌ها ۵۰٪ است (Li & Mendoza, 2002; Batanero & Borovcnik, 2016; Kahaki et al, 2019).

۹. معرف‌بودن^۴: اگر دانش‌آموزی به اشتباه فکر کند که نمونه‌هایی که با توزیع جامعه مطابقت دارند، نسبت به نمونه‌هایی که مطابقت ندارند احتمال وقوع بیش‌تری دارند، دارای بدفهمی معرف‌بودن است. برای مثال، اگر یک سکه را ۶ بار پرتاب کنیم کدام یک از موارد زیر احتمال رخ دادن بیش‌تری دارد؟ الف) رو، پشت، رو، پشت، رو، پشت ب) پشت، رو، رو، رو، پشت. پاسخ دانش‌آموز: گزینه الف. دانش‌آموز معتقد است احتمال رخ دادن دنباله‌ای که در آن تقریباً تعداد رو و پشت مساوی است از دنباله‌ای که در آن تعداد رو و پشت نابرابر است، بیش‌تر است (Fischbein & Konold et al, 1993; Schnarch, 1997; Batanero & Borovcnik, 2016).

۱۰. تأخر مثبت و منفی^۵: برخی از دانش‌آموزان فکر می‌کنند که اتفاقی که در آینده خواهد افتاد به آنچه در گذشته اتفاق افتاده است بستگی دارد. آن‌ها مستقل بودن پیشامدها را درک نمی‌کنند و باور دارند که اگر پیشامدی رخ نداده باشد در آینده جبران خواهد شد. هم‌چنین، اگر پیشامدی در گذشته رخ داده باشد در آینده جبران خواهد شد. برای

^۱. Mental interpretation

^۲. Visual effect or visual appearance

^۳. Equiprobability

^۴. Representativeness

^۵. Positive and negative recency effects

مثال، کدام گزینه بیش‌ترین احتمال را دارد؟ استدلال خود را توضیح دهید. الف) رو، پشت، رو (ب) رو، رو، رو (ج) پشت، رو، پشت (د) رو، رو، پشت (ه) تمام موارد احتمال یکسانی دارد. پاسخ دانش‌آموز: گزینه ب. چون دو بار رو آمده است، پس به احتمال زیاد بار سوم هم رو می‌آید (Li & Mendoza, 2002).

۱۱. دسترسی^۱: قضاوت بر حسب داده‌های در دسترس در حافظه انجام می‌شود به جای اینکه بر حسب داده‌های کامل انجام شود. نوعی سوگیری شناختی است که در ارزیابی مفاهیم یا تصمیم‌ها بر آنچه که به سرعت به خاطر آورده می‌شود تکیه می‌کند. برای مثال، در پرتاب یک تاس، کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ الف) احتمال آمدن عدد ۶ از عدد ۲ کم‌تر است. ب) احتمال آمدن عدد ۶ از عدد ۲ بیش‌تر است. ج) احتمال آمدن عدد ۶ و عدد ۲ برابر است. پاسخ دانش‌آموز: گزینه الف. دانش‌آموز با توجه به اطلاعات در دسترسی که از بازی منچ در ذهن دارد که باید برای شروع بازی عدد ۶ بیاورد نتیجه‌گیری می‌کند که عدد ۶ دیرتر می‌آید (Tversky & Kaheman, 1974; Fischbein & Schnarch, 1997; Batanero & Borovcnik, 2016).

۱۲. استقلال: رویدادها زمانی مستقل در نظر گرفته می‌شوند که وقوع یا نتیجه یک رویداد به نتیجه دیگری وابسته نباشد. برای مثال کیسه‌ای را در نظر بگیرید که شامل ۵ تپله، ۳ آبی و ۲ قرمز است. اگر به صورت تصادفی یک تپله از کیسه انتخاب کنیم، احتمال اینکه تپله آبی انتخاب شود، $\frac{3}{5}$ یا $\frac{2}{5}$ است. اگر تپله‌ها پس از هر بار بیرون آوردن به کیسه بازگردانده شوند احتمال انتخاب تپله آبی در انتخاب بعدی نیز $\frac{3}{5}$ است. این دو رویداد مستقل از یکدیگر هستند، زیرا بیرون آوردن رنگ آبی در انتخاب دوم، تحت تأثیر نتیجه حاصل از انتخاب نخست قرار نمی‌گیرد (Li & Mendoza, 2002; Lee et al, 2023).

تعدادی از بدفهمی‌های مطرح شده در زمینه احتمال به دوره دبیرستان و دانشگاه مرتبط است که با توجه به هدف این پژوهش، به ذکر عنوان و پژوهش‌هایی که به آن‌ها پرداختند، بسنده شده است.

۱۳. الگوها^۲ (Batanero & Borovcnik, 2016).

۱۴. لنگر انداختن^۳ (Tversky & Kaheman, 1974; Fischbein & Schnarch, 1997; Batanero & Borovcnik, 2016).

۱۵. عدم درک مفهوم «یا» و «و» در رخ دادن پیشامدها (Kahaki et al, 2019; Mirzaeian, 2020).

۱۶. دانش‌آموزان پیشامدهای مستقل و ناسازگار را اشتباه می‌گیرند (Rabbani, 2014; Mirzaeian, 2020).

۱۷. دانش‌آموزان در مفهوم‌سازی و مدل‌سازی برآمدهای غیر هم‌شانس دچار مشکلات اساسی هستند (Mirzaeian, 2020).

۱۸. بدفهمی در احتمال مرکب و قانون بیز (Rabbani, 2014; Mirzaeian, 2020).

۱۹. تأثیر حجم نمونه^۴ (Fischbein & Schnarch, 1997).

با بررسی بدفهمی‌های شناسایی شده در حوزه احتمال، می‌توان این بدفهمی‌ها را به دو دسته کلی محتوایی و ذهنی تقسیم کرد. در دسته‌ی نخست، بدفهمی‌هایی جای می‌گیرند که به محتوای احتمال و یا پیش‌نیاز آن بستگی دارند و دسته

¹. Availability

². Patterns

³. Anchoring

⁴. Effect on a sample size

دوم شامل بدفهمی‌هایی است که ناشی از قضاوت‌های شخصی افراد و یا مشکلات زبان‌شناختی آن‌هاست. این موارد در جدول ۱ ارائه می‌شود.

جدول ۱. دسته‌بندی بدفهمی‌های احتمالاتی

بدفهمی‌های احتمال			
محتوایی	پیش‌نیاز احتمال	زبان‌شناختی	ذهنی
محتوای احتمال			شخصی
-عدم توانایی نوشتن تمام حالات ممکن و مطلوب در فضای نمونه‌ای.	-عدم درک مفهوم	-عدم درک صحیح	-هم‌احتمالی
-دانش‌آموزان پیشامدهای مستقل و ناسازگار را اشتباه می‌گیرند.	جزء به جزء و جزء	واژگان پیوستار	-دسترسی
-دانش‌آموزان در مفهوم‌سازی و مدل‌سازی تناسب	به کل	احتمال	-الگوها
برآمدهای غیر هم‌شانس دچار مشکلات اساسی هستند.	-عدم درک نسبت و		-لنگر انداختن
-بدفهمی در احتمال مرکب و قانون بیز	تناسب		-عدم درک مفهوم «یا» و «و»
-تأثیر حجم نمونه	-عدم توانایی در	در رخ دادن پیشامدها	
	مقایسه کسرها	-قضاوت‌های ذهنی	
		-معرف‌بودن	
		-رویکرد نتیجه	

پیشینه پژوهش

در مطالعات داخل کشور، تعدادی از پژوهش‌ها به بررسی چالش‌های احتمال و یا موضوعات پیش‌نیاز آن پرداخته‌اند. برای مثال Rezaei (2012) در پژوهشی ویژگی‌های تفکر ترکیبیتی و جایگاه آن در برنامه درسی مدرسه‌ای را بررسی کرده است. طبق این مطالعه، چالش‌هایی که یادگیرنده برای حل مسئله‌های شمارشی به عنوان بخشی از مسائل ترکیبیتی با آن‌ها روبروست عبارتند از: ۱. درک مسئله و یافتن برخی از حالت‌های مطلوب مسئله، ۲. تشخیص حالت‌های نامطلوب و رده‌بندی حالت‌های مطلوب، ۳. پیدا کردن «تمام» حالت‌های ممکن برای شمارش، ۴. به دست آوردن روشی که تمام حالت‌های ممکن را تولید کند، ۵. استفاده از راهبردهای متنوع برای شمارش حالت‌ها، ۶. ایجاد ارتباط بین مسئله پیش رو با مسئله‌های ترکیبیتی دیگر، ۷. استفاده از استدلال‌های ترکیبیتی به ویژه برای شمارش حالت‌ها.

در مطالعه‌ای دیگر Doosti & Reyhani (2015) به شناسایی بدفهمی‌ها و استدلال‌های دانش‌آموزان پایه ششم در حل مسائل کسر پرداختند. بر اساس این پژوهش درک کسر منوط به درک پنج زیرساختار جزء به کل، نسبت، خارج قسمت، عملگر و اندازه است. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد دانش‌آموزان کسر را به درستی درک نکرده‌اند و تصور آن‌ها بیش‌تر مبتنی بر درک کسر به عنوان جزئی از کل است. آن‌ها در این زمینه با بدفهمی‌های گوناگونی نظیر بازنمایی کسر به عنوان جزء به جزء به جای جزء به کل، عدم توجه به برابری قسمت‌های افراز شده، در نظر گرفتن کسر بازنمایی کننده جزئی از کل به عنوان مقدار و شمارش علائم افراز روبه‌رو هستند.

هم‌چنین، Kahaki et al (2019) در یک مطالعه به بررسی درک و فهم دانش‌آموزان پایه هشتم از احتمال پرداختند. نتایج حاصل از تحلیل‌های آماری این پژوهش، ۷ گروه از بدفهمی‌ها را در دانش‌آموزان بدین شرح نشان داد: عدم درک اعداد گویا و ارتباط آن با کسرها، عدم توانایی شمارش همه حالت‌های ممکن، قضاوت‌های ذهنی، مشکلات زبان، استفاده از روش‌های خودساخته در محاسبه احتمال، تعمیم غیرمناسب و عدم درک برخی از مفاهیم پیش‌نیاز. آن‌ها در

پایان اشاره کردند به طور عمده ریشه مشکلات آموزشی احتمال را باید در مفاهیم اعداد گویا و کسر، عدم درک شهود، عدم توانایی شمارش فضای نمونه‌ای، عدم درک تفکر هندسی، جبری و جدایی احتمال از زندگی روزمره جستجو کرد. برای مثالی دیگر، Mirzaeian (2020) در مطالعه خود به موضوع بررسی فهم و درک دانش‌آموزان کلاس یازدهم ریاضی در مورد احتمال و بدفهمی آن پرداخته است. نتایج به دست آمده از مطالعه وی نشان داد: دانش‌آموزان پیشامدهای مستقل و ناسازگار را اشتباه می‌گیرند، آن‌ها در محاسبه اندازه فضای نمونه و شمارش تمام حالات ممکن و مطلوب یک پدیده تصادفی بدفهمی دارند، دانش‌آموزان از قانون جمع به جای قانون ضرب در انتخاب‌ها استفاده می‌کنند و در مفهوم‌سازی و مدل‌سازی برآمدهای غیر هم‌شانس دچار مشکلات اساسی هستند.

در مطالعات خارج از کشور، Odafe (2011) به بررسی فهم دانشجومعلمان از احتمال پرداخته است. نتایج پژوهش او نشان داده است دانشجویان مهارت‌های پیشرو مهم و دانش استدلال و رفتار احتمالاتی را بروز داده‌اند. همچنین، Nabbout-Cheiban (2017) در مطالعه‌ای نقشی را که شهود در پاسخ‌های دانشجومعلمان ایفا می‌کند و همچنین، وجود بدفهمی‌های احتمالاتی را بررسی کرده است. نتایج پژوهش او نشان داد مفهوم رویدادهای مستقل برای بیش‌تر شرکت کنندگان مشکل‌ساز بوده است. در پژوهشی دیگر، Hokor (2020) به استدلال احتمالاتی دانشجومعلمان در کلاس ساخت‌وسازگرایی پرداخته است. یافته‌های پژوهش وی نشان می‌دهد که مربیان معلمان باید از رویکرد سازنده‌گرایانه تدریس، با هدف قرار دادن بدفهمی‌های احتمالاتی در تربیت معلمان استفاده کنند.

باتوجه به حجم پژوهش‌هایی که در زمینه موضوع احتمال در جهان انجام شده است، می‌توان ابراز داشت این موضوع در برنامه درسی کشورهای گوناگون دارای اهمیت است. با وجود اهمیت احتمال، بدفهمی‌های زیادی نیز در یادگیری این مبحث وجود دارد که به برخی از آن‌ها اشاره شد. از آنجایی که نقش دانش معلمان در یادگیری دانش‌آموزان غیر قابل انکار است، برنامه‌ریزی برای آموزش دانشجومعلمان که برای تدریس این موضوعات آماده می‌شوند و بررسی بدفهمی‌های آن‌ها در حوزه احتمال اهمیت می‌یابد چرا که این امر می‌تواند به برنامه‌ریزی برای پیشگیری از شکل‌گیری بدفهمی‌ها در ذهن دانشجومعلمان و در نتیجه دانش‌آموزان آینده منجر شود.

روش پژوهش

این مطالعه از نظر هدف، کاربردی و از نظر گردآوری داده‌ها توصیفی محسوب می‌شود. پژوهش حاضر از نوع زمینه‌یابی است چرا که به توصیف بدفهمی‌های دانشجومعلمان در حوزه احتمال می‌پردازد. جامعه آماری این پژوهش کلیه دانشجومعلمان دوره کارشناسی رشته آموزش ابتدایی در سه استان تهران، مرکزی و خراسان شمالی هستند که در نیم‌سال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲ تحصیل می‌کردند. نمونه مورد مطالعه ۱۲۲ نفر از افراد جامعه هستند که نمونه در دسترس پژوهشگران بودند. جدول ۲، فراوانی نمونه آماری پژوهش را نشان می‌دهد.

جدول ۲. فراوانی نمونه آماری پژوهش

نام استان	رشته تحصیلی در دبیرستان	فراوانی	جمع
مرکزی	انسانی	۳۲	۷۱
	تجربی	۳۰	
	ریاضی	۹	

	۱۵	انسانی	
۲۱	۲	تجربی	تهران
	۴	ریاضی	
	۱۳	انسانی	
۳۰	۱۵	تجربی	خراسان شمالی
	۲	ریاضی	

در این مطالعه، پس از گردآوری و دسته‌بندی بدفهمی‌های حوزه احتمال، آن دسته از مواردی که مرتبط با مباحث دوره دبیرستان و دانشگاه بود، کنار گذاشته و ۱۱ مورد از این بدفهمی‌ها، مرتبط با دوره ابتدایی، انتخاب شد. با توجه به اینکه امکان بررسی همه این ۱۱ بدفهمی در یک پژوهش ممکن نبود، از ۶۶ معلم ابتدایی مجرب در خصوص شایع‌ترین بدفهمی‌ها، نظرسنجی انجام شد. معلمان بر اساس تجربه خود، این ۱۱ مورد بدفهمی را اولویت‌بندی کردند. براساس نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل نظرات معلمان، ۶ مورد از بدفهمی‌هایی که به زعم آن‌ها، در میان دانش‌آموزان رایج‌تر بودند، شناسایی و سپس بر اساس این ۶ مورد به طراحی یا اقتباس سؤالات پژوهش در مورد دانشجومعلم‌ان اقدام شد. این موارد عبارتند از: عدم درک مفهوم جزء به جزء و جزء به کل، عدم درک نسبت و تناسب، رویکرد نتیجه، استفاده از شهود (اثر بصری) در مقایسه احتمال، عدم توانایی نوشتن تمام حالات ممکن و مطلوب و معرف بودن. سپس به طراحی یا اقتباس سؤالات، بر مبنای این بدفهمی‌ها، اقدام شد. برای ۴ مورد از بدفهمی‌ها هر کدام دو سؤال و برای دو مورد هر کدام یک سؤال طرح یا اقتباس شد. بنابراین آزمونی با ۱۰ سؤال تشریحی برای پژوهش آماده شد. روایی این آزمون توسط تعدادی از اساتید آموزش ریاضی و معلمان ریاضی مجرب تأیید شد. سپس برای تعیین پایایی آن، پس از اجرای آزمایشی آزمون در یک گروه ۲۰ نفره از جامعه، بمنظور استفاده از روش برآورد ضریب آلفای کرونباخ، به هر پاسخ نمره ۰ تا ۲ نسبت داده شد. به این صورت که برای پاسخ‌های درست نمره ۲، برای پاسخ‌های ناقص نمره ۱ و برای پاسخ‌های نادرست و سؤالات بی‌پاسخ، نمره ۰ در نظر گرفته شد. سپس ضریب آلفای کرونباخ آزمون ۰/۷ به دست آمد که مقدار قابل قبولی را در مورد پایایی آن نشان می‌دهد.

پس از اجرای آزمون در بین اعضای گروه نمونه، پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان به چهار دسته گوناگون تقسیم شدند: الف) درست: زمانی پاسخ یک سؤال، عنوان درست را می‌گیرد که صحیح باشد و برای تشریح آن پاسخ، استدلال مناسبی به کار رفته باشد.

ب) ناقص: در سه حالت پاسخ یک سؤال ناقص در نظر گرفته می‌شود: ۱) حالتی که پاسخ صحیح، اما بدون استدلال نوشته شده باشد، ۲) بخشی از جواب، درست و بخش دیگر جواب شامل بدفهمی باشد و ۳) هم به جواب درست اشاره شده باشد و هم به جواب نادرست.

ج) نادرست: زمانی پاسخ یک سؤال، عنوان نادرست را می‌گیرد که یا اشتباه باشد و یا پاسخ درست باشد اما در استدلال به کار رفته برای توضیح این پاسخ، بدفهمی وجود داشته باشد. گفتنی است اگر پاسخی دارای خطای سهوی باشد (مثلاً دانشجو یکی از اعداد سؤال را اشتباه خوانده باشد) این پاسخ در زمره پاسخ‌های نادرست نخواهد بود. بنابراین، تمامی پاسخ‌هایی که نشان از بدفهمی دانشجو دارد در این دسته قرار می‌گیرد.

د) بی‌پاسخ: سؤالاتی که هیچ پاسخی برای آن‌ها نوشته نشده است بی‌پاسخ بشمار می‌روند. در این مطالعه، داده‌های به دست آمده از پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان با روش کمی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. بدین منظور از آمار توصیفی شامل جدول توزیع فراوانی، بیان درصد داده‌ها و نمودار ستونی استفاده شده است.

یافته‌های پژوهش

در این بخش بمنظور بررسی پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان به سؤالات احتمال، برگه‌های آزمون که توسط آن‌ها تکمیل شده است، توصیف و سپس تجزیه و تحلیل می‌شوند. توصیف داده‌های مورد مطالعه از طریق جدول‌ها و نمودار انجام می‌شود. از این‌رو برای سؤالات مربوط به هر بدفهمی، نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان نشان داده شده و در ادامه برای هر سؤال جدول فراوانی پاسخ‌ها بر اساس فراوانی پاسخ‌های درست، ناقص، نادرست و بدون پاسخ ارائه شده است. این موارد بر اساس شش بدفهمی مورد مطالعه، به ترتیب شیوع بیش‌تر به کم‌تر ارائه خواهند شد.

بدفهمی عدم توانایی نوشتن حالات ممکن و مطلوب

سؤال ۵ پژوهش: دالامبر (۱۷۸۳-۱۷۱۷) ریاضی‌دان و فیلسوف بزرگ فرانسوی معتقد بود که آزمایش تصادفی پرتاب دو سکه، سه نتیجه دارد: هر دو سکه رو می‌آیند، هر دو سکه پشت می‌آیند، یا یک سکه رو و سکه دیگر پشت می‌آید، بنابراین احتمال رخ دادن هر نتیجه ^۱/_۳ است. آیا شما با نظر دالامبر موافقت می‌کنید؟ چرا؟ (Jahanipour, 1998)

شکل ۲. سؤال نخست مربوط به بدفهمی عدم توانایی نوشتن حالات ممکن و مطلوب

در این سؤال تعدادی از دانشجومعلم‌ان نظر دالامبر را تأیید کرده‌اند و بر این باورند که جز این سه حالت، حالت دیگری وجود ندارد. برخی از آن‌ها نیز درک نکرده‌اند که در نوشتن تمام حالات ممکن دو سکه، همواره ترتیب اهمیت دارد و برای اهمیت داشتن یا نداشتن ترتیب دو حالت گوناگون را در نظر گرفته‌اند. دانشجومعلم‌ان این سؤال را با برخی از سؤالات مبحث ترکیبیات که در نظر گرفتن یا نگرفتن ترتیب، در پاسخ سؤال تفاوت ایجاد می‌کند، اشتباه گرفته‌اند. بعضی از دانشجومعلم‌ان به تعداد سکه توجهی نداشته و بر این باورند که سکه ۲ حالت بیش‌تر ندارد. بنابراین، احتمال رو یا پشت آمدن، ^۱/_۲ است. این مورد نشان می‌دهد آن‌ها توانایی تعمیم دانش پیشین درباره یک سکه، به یادگیری جدید (بیش از یک سکه) را ندارند.

جدول ۳. نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان به سؤال ۵

انواع پاسخ‌ها	نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان
پاسخ درست	خیر چون ۴ حالت وجود دارد و احتمال رخ دادن هر نتیجه ^۱ / _۴ ست. (پ-پ)(پ-ر)(ر-پ)(ر-ر)
پاسخ ناقص	اگر ترتیب مهم نباشد نظر ایشان درست است اما اگر ترتیب مهم باشد نظر دالامبر غلط است. خیر زیرا این استدلال درست نیست و احتمال انجام دو سکه برای هر سکه متفاوت است بنابراین،
پاسخ‌های نادرست	احتمالش ^۱ / _۲ می‌باشد. بله چون جز ۳ نتیجه امکان دیگری وجود ندارد و نظر ایشان درست می‌باشد.

سؤال ۱۰ پژوهش: یک خانواده دو فرزند دارد، که حداقل یکی از آن‌ها پسر است. احتمال اینکه فرزند دیگر دختر باشد چقدر است؟ (DeTemple et al, 2015)

شکل ۳. سؤال دوم مربوط به بدفهمی عدم توانایی نوشتن حالات ممکن و مطلوب

در این سؤال تعدادی از دانشجومعلم‌ان بدون توجه به شرایط ذکر شده در مسئله، بر این باورند که جنسیت فرزند نخست ارتباطی به فرزند دوم ندارد و احتمال اینکه فرزند دوم دختر باشد، $\frac{1}{4}$ است. برخی از آن‌ها حالات ممکن را ۲ ((د-پ) و (پ-د)) و حالات مطلوب را ۴ نوشته‌اند. این دسته از دانشجومعلم‌ان، شرط دست‌کم یک پسر را به عنوان شرطی که احتمال را تغییر می‌دهد درک نکرده‌اند.

جدول ۴. نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان به سؤال ۱۰

انواع پاسخ‌ها	نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان
پاسخ درست	کل حالات = ۳ حالت $\times$ $\{ (د-پ)(پ-د)(د-د)(پ-پ) \}$ احتمال دختر بودن فرزند دیگر = $\frac{2}{3}$
پاسخ‌های نادرست	جنسیت یکی از بچه‌ها هیچ تاثیری در جنسیت فرزند دوم ندارد و در هر مورد احتمال جنسیت فرزند $\frac{1}{2}$ است. فرزند یا دختر است یا پسر. $\frac{2}{4}$ است زیرا $\{ (د-پ)(پ-د)(د-د)(پ-پ) \}$

در جدول ۵، توزیع پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان به سؤالات ۵ و ۱۰ ارائه شده است.

جدول ۵. توزیع پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان به سؤالات ۵ و ۱۰

نوع پاسخ	پاسخ درست	پاسخ نادرست	پاسخ ناقص	بی پاسخ	کل
شماره سؤال	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی
سؤال ۵	۷۲	۵۹	۲۸	۲۳	۱۹
سؤال ۱۰	۲۶	۲۱/۳	۸۶	۷۰/۵	۶

بدفهمی معرف‌بودن

سؤال ۳ پژوهش: در یک بازی، اعداد ۱ تا ۶۴ روی کارت‌های یکسان نوشته شده است. اگر قرار باشد ۶ کارت از این کارت‌ها انتخاب شوند، کدام مجموعه از کارت‌های زیر احتمال انتخاب شدنشان بیش‌تر است؟ چرا؟
 $A = \{ ۲۶, ۴۸, ۱۲, ۹, ۵۷, ۳ \}$ $B = \{ ۶, ۵, ۴, ۳, ۲, ۱ \}$ (Nabbout-Cheiban, 2017)

شکل ۴. سؤال نخست مربوط به بدفهمی معرف‌بودن

تعدادی از دانشجومعلم‌ان تجربه شخصی خود را برای قضاوت در تعیین و مقایسه احتمال دخیل می‌کنند و بر این باورند که احتمال اینکه اعداد به صورت پشت سرهم ظاهر شوند بسیار کم است. از این‌رو، آنان بدفهمی «تجربه

جدول ۶. نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانشجو معلمان به سؤال ۳

انواع پاسخ‌ها	نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانشجویان
پاسخ درست	احتمال هر دو برابر است زیرا توالی تاثیری بر احتمال ندارد و انتخاب کارت‌ها کاملاً تصادفی است.
پاسخ‌های نادرست	نمی‌توان گفت احتمال کدام یک بیش‌تر است، زیرا کارت‌ها به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند. مجموعه B چون ترتیب اعداد پشت سرهم نوشته شده است. شاید کسی بخواهد ۶ کارت پشت سرهم و به ترتیب انتخاب کند که در این صورت می‌تواند راحت کارت‌های خود را انتخاب کند ولی در مجموعه A به طور تصادفی هستند. مجموعه‌ی A. زیرا احتمال این که کارت‌های انتخاب شده، دقیقاً به ترتیب و از ۱ تا ۶ باشد بسیار کم است.

سؤال ۷ پژوهش: اگر یک سکه را ۱۰ بار پرتاب کنیم کدام یک از پیشامدهای زیر به احتمال بیش تری اتفاق می افتد؟ استدلال خود را توضیح دهید.

(الف) رو، پشت، رو، پشت، رو، پشت، رو، پشت، رو، پشت

(ب) پشت، رو، رو، رو، پشت، پشت، رو، پشت، رو، رو

(ج) هر دو گزینه احتمال یکسانی دارند.

(محقق ساخته)

در این سؤال همانند سؤال ۳ تعدادی از دانشجومعلم‌ان تجربه شخصی خود را در تعیین و مقایسه احتمال دخیل می‌کنند و بر این باورند که احتمال اینکه سکه در ده بار پرتاب، به‌طور منظم و یکی در میان، رو و پشت بیاید، بسیار کم است. از این‌رو آنان بدفهمی «تجربه شخصی» را دارا هستند. آن‌ها بر این باورند که هرچه قدر نتیجه پرتاب سکه‌ها فاقد نظم باشد احتمال رخ دادن‌شان بیش‌تر می‌شود.

برخی از دانشجو معلمان به اشتباه فکر می کنند نمونه هایی که با توزیع جامعه مطابقت دارند، نسبت به نمونه هایی که مطابقت ندارند، احتمال وقوع بیش تری دارند. از این رو بر این باورند که چون احتمال رو آمدن یا پشت آمدن در پرتاب سکه $\frac{1}{2}$ است، بنابراین در ۱۰ بار پرتاب، حالتی که کسر $\frac{\text{رو آمدن}}{\text{تمام حالت های ممکن}}$ و همچنین، $\frac{\text{پشت آمدن}}{\text{تمام حالت های ممکن}}$ برابر $\frac{1}{2}$ شود، احتمال وقوع بیش تری دارد. این دسته از دانشجو معلمان نیز دارای بدفهمی معرف بودن هستند.

جدول ۷. نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان به سؤال ۷

انواع پاسخ‌ها	نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان
پاسخ درست	ج. احتمال آمدن پشت و رو با هم برابر و مساوی $\frac{1}{2}$ است.
پاسخ‌های نادرست	گزینه الف. انتظار می‌رود در ۱۰ بار پرتاب، ۵ بار رو و ۵ بار پشت بیاید زیرا احتمال آن $\frac{1}{2}$ است. احتمال الف یک احتمال نظری است که در آن انتظار می‌رود شانس هر کدام از گزینه‌ها ۵۰ درصد باشد. اما در گزینه ب احتمال، تجربی می‌باشد که در آن انتظار نداریم شانس هر دو گزینه برابر باشد. پیشامد ب از الف احتمال بیش‌تری دارد زیرا پیشامد متناوب احتمال کم‌تری دارد رخ دهد.
در جدول ۸ توزیع پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان به سؤالات ۳ و ۷ ارائه شده است.	

جدول ۸. توزیع پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان به سؤالات ۳ و ۷

نوع پاسخ	پاسخ درست		پاسخ نادرست		پاسخ ناقص		بی پاسخ		کل
	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	
شماره سؤال	۷۱	۵۸/۲	۳۷	۳۰/۳	۹	۷/۴	۵	۴/۱	۱۲۲
سؤال ۳	۷۲	۵۹	۳۵	۲۸/۷	۱۰	۸/۲	۵	۴/۱	۱۲۲
سؤال ۷									

بدفهمی عدم درک مفهوم جزء به جزء و جزء به کل

سؤال ۱ پژوهش: دو جعبه حاوی توپ داریم. جعبه نخست ۶ عدد توپ قرمز و ۲ عدد توپ سبز دارد. جعبه دوم ۲۰ عدد توپ قرمز و ۱۰ عدد توپ سبز دارد. می‌خواهیم از یکی از جعبه‌ها به‌طور تصادفی توپ خارج کنیم. کدام جعبه به ما شانس بیش‌تری برای برداشتن توپ قرمز می‌دهد؟ چرا؟ (محقق ساخته)

شکل ۶. سؤال نخست مربوط به بدفهمی عدم درک مفهوم جزء به جزء و جزء به کل

برخی از دانشجومعلم‌ان، سؤال ۱ را که مربوط به مقایسه یا تعیین احتمال است با سؤالاتی که مربوط به تعیین دقیق پیشامد بعدی است، اشتباه گرفته و بر این باورند که چون در مورد پیشامدهای تصادفی حرف می‌زنیم، نمی‌توان نتیجه آن را پیش‌بینی کرد و هرچیزی ممکن است اتفاق بیفتد. هم‌چنین، تعدادی از دانشجومعلم‌ان، جعبه دوم را به علت داشتن توپ قرمز بیش‌تر، انتخاب کرده و معتقد بودند هر چه توپ قرمز در ظرفی بیش‌تر باشد، شانس برداشتن آن نیز بیش‌تر است (در سؤال ۶ نیز همین استدلال بکار رفته است). به بیان دیگر، این دانشجویان بر این باورند که هرچه قدر تعداد حالت‌های مطلوب بیش‌تر باشد، احتمال وقوع آن پدیده نیز بیش‌تر می‌شود. آن‌ها، محاسبه و مقایسه نسبت تعداد توپ‌های قرمز به تعداد همه توپ‌ها را برای تعیین شانس در نظر نگرفته و احتمالاً بر اساس شهود، به مقایسه شانس پرداخته‌اند. برخی از دانشجومعلم‌ان نیز در هر دو سؤال، برای مقایسه احتمال (نه شانس)، از کسر جزء به جزء استفاده کردند.

جدول ۹. نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان به سؤال ۱

نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان	
جعبه نخست $= \frac{6}{8} = 0.75$	
جعبه دوم $= \frac{2}{3} = 0.67$	جعبه نخست چون احتمال آن بیش‌تر است.
جعبه نخست چون نسبت قرمز به سبز در جعبه نخست بیش‌تر از جعبه دوم است پس احتمال برداشتن توپ قرمز بیش‌تر است.	در جعبه نخست نسبت قرمز به سبز $\frac{3}{1}$ و در جعبه دوم نسبت قرمز به سبز $\frac{2}{1}$.
چون بحث تصادف است به قطعیت نمی‌شود گفت کدام احتمال بیش‌تری دارد ولی جواب حتماً جعبه دوم است به دلیل بیش‌تر بودن رنگ قرمز در جعبه دوم.	

سؤال ۶ پژوهش: در کیسه A، ۱۸ مهره آبی و ۵ مهره سفید وجود دارد و در کیسه B، ۱۸۰ مهره آبی و ۵۰ مهره سفید وجود دارد. مهره‌های هر کیسه را کاملاً مخلوط می‌کنیم. اگر بدون نگاه کردن به کیسه بخواهیم مهره‌ای سفید خارج کنیم، احتمال برداشتن مهره سفید از کیسه A را با احتمال برداشتن مهره سفید از کیسه B مقایسه کنید و دلیل خود را توضیح دهید. (Kahaki et al, 2019 با اندکی تغییر).

شکل ۷. سؤال دوم مربوط به بدفهمی عدم درک مفهوم جزء به جزء و جزء به کل

در سؤال ۶ تعدادی از دانشجومعلم‌ان، بر این باورند که احتمال برداشتن مهره سفید از کیسه B بیش‌تر از A است؛ زیرا تعداد مهره‌های سفید در کیسه B بیش‌تر و در نتیجه احتمال خارج شدن مهره سفید از این کیسه بیش‌تر خواهد بود. هم‌چنین، تعدادی از دانشجو معلم‌ان، احتمال را از راه نوشتن نسبت جزء به جزء محاسبه کرده و به پاسخ‌های $\frac{5}{18}$ یا $\frac{18}{5}$ رسیده‌اند. این گونه پاسخ‌ها حاکی از این است که دانشجومعلم‌ان در درک مفهوم جزء به کل دارای بدفهمی هستند.

جدول ۱۰. نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان به سؤال ۶

نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان		انواع پاسخ‌ها
احتمال در آمدن مهره سفید در هر دو جعبه مساوی است.		پاسخ درست
$\frac{50}{230} =$ کیسه B	$\frac{5}{23} =$ کیسه A	
احتمال‌ها برابر است چون در هر دو حالت مهره‌های آبی به یک اندازه از مهره‌های سفید بیش‌تر است و تنها ما تعداد را زیاد کرده‌ایم و به اختلاف بین این دو دست نزدیک $\frac{50}{180} = \frac{5}{18}$		پاسخ ناقص
احتمال برداشتن مهره‌های سفید در کیسه B بیش‌تر است چون تعداد سفید به همراه احتمال آن بیش‌تر است.		
$\frac{5}{50} = \frac{18}{180}$	$\frac{18}{5} = 36\%$	پاسخ‌های نادرست
هر دو حالت برابر چون هر دو احتمال وقوع یکسانی دارند.		

در جدول ۱۱ توزیع پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان به سؤالات ۱ و ۶ نشان داده شده است.

جدول ۱۱. توزیع پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان به سؤالات ۱ و ۶

نوع پاسخ	پاسخ درست	پاسخ نادرست	پاسخ ناقص	بی پاسخ	کل
شماره سؤال	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی
سؤال ۱	۹۲	۷۵/۴	۲۰	۱۶/۴	۹
					۷/۴
					۱
					۰/۸
					۱۲۲
سؤال ۶	۸۲	۶۷/۲	۲۸	۲۳	۷
					۵/۷
					۵
					۴/۱
					۱۲۲

بدفهمی رویکرد نتیجه

سؤال ۹ پژوهش: یک ریاضی‌دان کیسه‌ای را با تیل‌های سیاه و سفید پر کرد. او واقعاً نمی‌دانست چند تیل سیاه و چند تیل سفید در کیسه وجود دارد. پس از مخلوط کردن کامل آن‌ها، او نگاهی انداخت و پیش‌بینی کرد که «اگر یک تیل را بدون نگاه کردن از کیسه بیرون بیاورم، احتمال سفید بودن آن ۸۰ درصد است». در اینجا پنج موقعیت وجود دارد. به طور مقایسه‌ای، در کدام موقعیت می‌توان پیش‌بینی ریاضی‌دان را بسیار دقیق در نظر گرفت؟ دلیل انتخاب خود را توضیح دهید.

الف) یک تیل بیرون کشیده شود و آن تیل سفید باشد.

ب) یک تیل بیرون کشیده شود و آن تیل سیاه باشد.

ج) فرض کنید بیرون کشیدن مهره، ۱۰ بار تکرار شود، تیل‌های سفید ۱۰ بار بیرون کشیده شوند.

د) فرض کنید بیرون کشیدن مهره ۱۰ بار تکرار شود، تیل‌های سفید ۹ بار بیرون کشیده شوند.

ه) فرض کنید بیرون کشیدن مهره ۱۰ بار تکرار شود، تیل‌های سفید ۸ بار بیرون کشیده شوند (Li, 2000).

شکل ۸. سؤال مربوط به بدفهمی رویکرد نتیجه

برخی از دانشجومعلم‌ان بر این باورند که چون احتمال ۸۰٪ زیاد است، گزینه «د» که ۹ تیل از ۱۰ تیل سفید باشد به عنوان پاسخ صحیح در نظر گرفته می‌شود. طبق تعریف، دانشجومعلم‌انی که گزینه‌های الف، ج یا د را انتخاب کرده‌اند، این بدفهمی را دارا هستند.

جدول ۱۲. نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان به سؤال ۹

انواع پاسخ‌ها	نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان
پاسخ درست	طبق احتمال مطرح شده در صورت سؤال حالت ه از همه مقبول‌تر به نظر می‌رسد. د چون تعداد سفیدها بیش‌تر است.
پاسخ‌های نادرست	ج. پس از ۱۰ بار تکرار به این نتیجه می‌رسیم که تعداد مهره سیاه بسیار اندک است که هر بار سفید بیرون آمده. د. با یک تیل که نمی‌توان تصمیم گرفت. با ۱۰ تیل وقتی منطقی می‌شود که ۹ تا سفید بکشد.

در جدول ۱۳ توزیع پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان به سؤال ۹ ارائه شده است.

جدول ۱۳. توزیع پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان به سؤال ۹

نوع پاسخ	پاسخ درست	پاسخ نادرست	پاسخ ناقص	بی پاسخ	کل
شماره سؤال	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی
سؤال ۹	۹۱	۷۴/۶	۱۰	۸/۲	۷
				۵/۷	۱۴
				۱۱/۵	۱۲۲

بدفهمی عدم درک نسبت و تناسب

سؤال ۴ پژوهش: در کیسه‌ای ۳۶ گوی آبی، سبز، قرمز و زرد وجود دارد. بدون نگاه کردن به درون کیسه یک گوی را بیرون می‌کشیم. اگر احتمال سبز بودن این گوی $\frac{4}{9}$ باشد در این کیسه چند گوی سبز وجود دارد؟ چرا؟ (آزمون تیمز)

شکل ۹. سؤال نخست مربوط به بدفهمی عدم درک نسبت و تناسب

در سؤال ۴ یک دانشجو عدد ۹ را که بمنظور رساندن عدد ۴ به ۳۶ ضرب می‌شود به عنوان تعداد گوی سبز در نظر گرفته است.

جدول ۱۴. نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان به سؤال ۴

انواع پاسخ‌ها	نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان
پاسخ درست	$\frac{4 \times 4}{9 \times 4} = \frac{x}{36}$ ۱۶ گوی سبز وجود دارد.
پاسخ نادرست	۹ گوی سبز وجود دارد: $\frac{4 \times 9}{9 \times 9} = \frac{36}{81}$

سؤال ۸ پژوهش: جعبه‌ای ۲۴۰ مهره آبی و تعدادی مهره قرمز دارد. اگر احتمال خارج شدن مهره آبی از این جعبه $\frac{8}{10}$ باشد، این جعبه چند مهره قرمز دارد؟ (محقق ساخته)

شکل ۱۰. سؤال دوم مربوط به بدفهمی عدم درک نسبت و تناسب

در سؤال ۸ عده‌ای از دانشجومعلم‌ان در درک نسبت و تناسب، دچار بدفهمی هستند و عدد ۲۴۰ که تعداد حالات مطلوب است به عنوان حالات ممکن در نظر گرفته‌اند. هم‌چنین، برخی از دانشجومعلم‌ان تلاش کرده‌اند از طریق حل معادله و تعیین مقدار مجهول به پاسخ برسند اما به نتیجه‌ای نرسیده‌اند.

جدول ۱۵. نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان به سؤال ۸

انواع پاسخ‌ها	نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان
پاسخ درست	$300 - 240 = 60$ تعداد مهره‌های قرمز درون جعبه ۶۰ تاست. $\frac{8}{10} = \frac{240}{300}$
پاسخ‌های نادرست	$\frac{8}{10} = \frac{x}{240} \rightarrow x = 192 \rightarrow 240 - 192 = 48$ $240 + x = 10 + x$

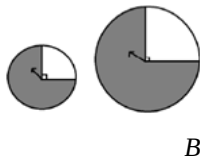
در جدول ۱۶ توزیع پاسخ‌های دانشجویان به این سؤالات ارائه شده است.

جدول ۱۶. توزیع پاسخ‌های دانشجویان به سؤالات ۴ و ۸

شماره سؤال	پاسخ درست		پاسخ نادرست		پاسخ ناقص		بی پاسخ		کل
	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	
سؤال ۴	۱۰۷	۸۷/۸	۶	۴/۹	۰	۰	۹	۷/۳	۱۲۲
سؤال ۸	۷۷	۶۳/۱	۳۴	۲۷/۹	۱	۰/۸	۱۰	۸/۲	۱۲۲

بدفهمی استفاده از شهود (اثر بصری) در مقایسه احتمال

سؤال ۲ پژوهش: عقربه هر یک از چرخنده‌ها را می‌چرخانیم. احتمال توقف عقربه در قسمت سیاه در چرخنده A را با احتمال توقف عقربه در قسمت سیاه در چرخنده B مقایسه کنید و دلیل خود را توضیح دهید (Kahaki et al, 2019) با اندکی تغییر).



شکل ۱۱. سؤال مربوط به بدفهمی استفاده از شهود (اثر بصری) در مقایسه احتمال

برخی از دانشجویان بر این باورند که بزرگتر شدن بخش سیاه در چرخنده، احتمال را بیش‌تر می‌کند. علت این است که بزرگ‌تر شدن کل دایره و ثابت باقی ماندن نسبت‌ها را در نظر نمی‌گیرند. در واقع برای محاسبه و مقایسه احتمال فقط فضای مطلوب را مقایسه می‌کنند. برخی نیز مقایسه احتمال را به عواملی مانند سرعت عقربه‌ها یا میزان نیرویی که عقربه‌ها را می‌چرخاند نسبت داده‌اند. موارد مذکور، ناشی از این است که دانشجویان از شهود (بصر) خود در مقایسه احتمال استفاده می‌کنند.

جدول ۱۷. نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانشجویان به سؤال ۲

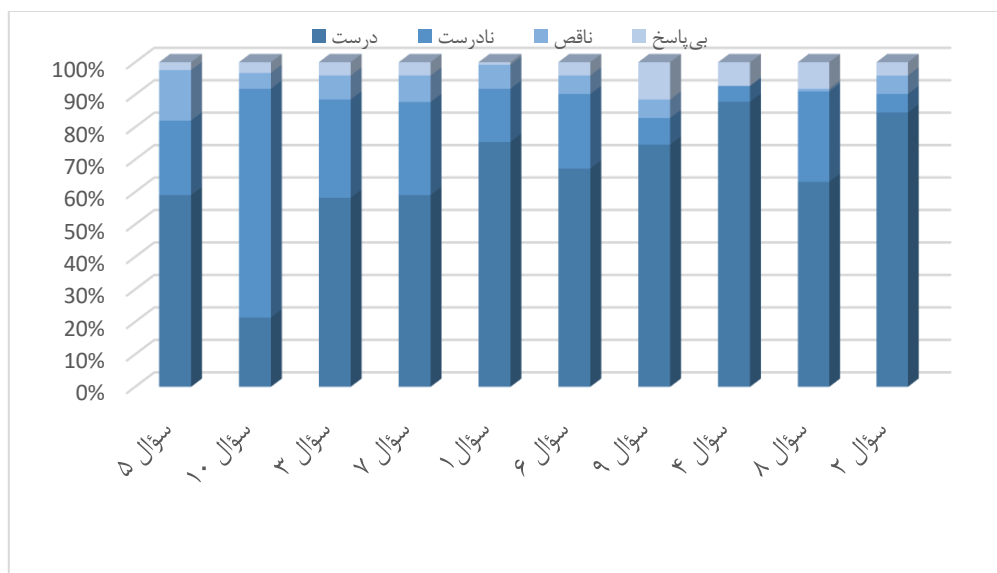
انواع پاسخ‌ها	نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانشجویان
پاسخ درست	در هر دو چرخنده بخش رنگی $\frac{3}{4}$ و بخش غیر رنگی $\frac{1}{4}$ است. پس در نتیجه احتمال توقف در قسمت سیاه در هر دو برابر است. احتمال توقف در دایره B بیش‌تر است چون محدوده بیش‌تری از قسمت سیاه را شامل می‌باشد.
پاسخ‌های نادرست	احتمال توقف چرخنده در هر دو عقربه یکسان است زیرا به همان میزان که فضای عقربه بزرگ است سرعت عقربه نیز بیش‌تر است و در عقربه A هم به میزان فضای کم عقربه سرعت چرخنده کم‌تر است پس شانس هر دو به یک میزان است.

در جدول ۶، توزیع پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان به سؤال ۲ ارائه می‌شود.

جدول ۱۸. توزیع پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان به سؤال ۲

شماره سؤال	نوع پاسخ		پاسخ درست		پاسخ نادرست		پاسخ ناقص		بی پاسخ	
	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد
سؤال ۲	۱۰۳	۸۴/۴	۷	۵/۷	۷	۵/۷	۵	۴/۱	۱۲۲	کل

بمنظور بررسی و مقایسه بهتر، نتایج توزیع پاسخ‌های سؤالات پژوهش، به تفکیک نوع پاسخ، در نمودار ۱ نمایش داده شده است.



نمودار ۱. نمودار ستونی درصد پاسخ‌گویی به سؤالات پژوهش به تفکیک نوع پاسخ

با هدف مقایسه بدفهمی‌ها و مرتب کردن آن‌ها بر اساس میزان شیوع در میان نمونه مورد مطالعه، در جدول ۱۹، میانگین درصد توزیع پاسخ‌های سؤالات هر بدفهمی ارائه شده است.

جدول ۱۹. میانگین درصد توزیع پاسخ‌های سؤالات هر بدفهمی

نوع بدفهمی	نوع پاسخ				بی پاسخ
	درست	نادرست	ناقص	بی پاسخ	
عدم درک مفهوم جزء به جزء و جزء به کل	۷۱/۳	۱۹/۷	۶/۵	۲/۴	
استفاده از شهود (اثر بصری) در مقایسه احتمال	۸۴/۴	۵/۷	۵/۷	۴/۱	
معرف بودن	۵۸/۶	۲۹/۵	۷/۸	۴/۱	
عدم درک نسبت و تناسب	۷۵/۴	۱۶/۴	۰/۴	۷/۷۵	

۲/۸	۱۰/۲	۴۶/۷	۴۰/۱۵	عدم توانایی نوشتن حالات ممکن و مطلوب
۱۱/۵	۵/۷	۸/۲	۷۴/۶	رویکرد نتیجه

با توجه به درصد پاسخ‌های درست، هر بدفهمی که سؤالات مربوط به آن در مقایسه با بقیه سؤالات، درصد کم‌تری پاسخ درست داشته باشد، به عنوان رایج‌ترین بدفهمی در نظر گرفته می‌شود و به همین ترتیب بدفهمی‌ها مرتب می‌شوند. بنابراین با توجه به جدول ۱۹ این موارد به ترتیب میزان شیوع بیش‌تر به کم‌تر، در میان دانشجومعلم‌ان، عبارتند از: ۱. عدم توانایی نوشتن تمام حالات ممکن و مطلوب، ۲. معرف‌بودن، ۳. عدم درک مفهوم جزء به جزء و جزء به کل، ۴. رویکرد نتیجه، ۵. عدم درک نسبت و تناسب و ۶. استفاده از شهود (اثر بصری) در مقایسه احتمال.

بحث و نتیجه‌گیری

شناسایی و بررسی بدفهمی‌های دانشجومعلم‌ان در حوزه احتمال به جهت امکان انتقال این بدفهمی‌ها به دانش‌آموزان آینده حائز اهمیت است. از این رو رفع بدفهمی‌های شناسایی شده‌ی دانشجومعلم‌ان در دوره‌های تربیت معلم، می‌تواند سبب ارتقای کیفیت آموزش احتمال در مدارس شود. با توجه به اینکه موضوع احتمال در برنامه درسی کشور از دوره ابتدایی آغاز می‌شود، این پژوهش به بررسی بدفهمی‌های دانشجومعلم‌ان دوره کارشناسی رشته آموزش ابتدایی در حوزه احتمال پرداخت. در پاسخ به سؤال پژوهش، تحلیل داده‌ها نشان داد که دانشجومعلم‌ان هر شش بدفهمی مورد مطالعه‌ی این پژوهش را در پاسخ‌های خود نشان دادند. این موارد به ترتیب میزان شیوع بیش‌تر به کم‌تر، در میان دانشجومعلم‌ان، عبارتند از: ۱. عدم توانایی نوشتن تمام حالات ممکن و مطلوب، ۲. معرف‌بودن، ۳. عدم درک مفهوم جزء به جزء و جزء به کل، ۴. رویکرد نتیجه، ۵. عدم درک نسبت و تناسب و ۶. استفاده از شهود (اثر بصری) در مقایسه احتمال. در برخی از پاسخ‌ها، بدفهمی‌های هم‌احتمالی و تجربه شخصی نیز ملاحظه شد.

با مقایسه نتایج این پژوهش با پژوهش Kahaki et al (2019) که به بررسی بدفهمی‌های دانش‌آموزان پایه هشتم از مبحث احتمال پرداختند، مشخص شد که چهار مورد از بدفهمی‌های شناسایی شده در دانش‌آموزان پایه هشتم با بدفهمی‌های شناسایی شده در دانشجومعلم‌ان رشته آموزش ابتدایی مشترک است. این موارد عبارتند از: عدم توانایی نوشتن تمام حالات ممکن و مطلوب، عدم درک مفهوم جزء به جزء و جزء به کل، عدم درک نسبت و تناسب و استفاده از شهود در مقایسه احتمال. افزون بر این، دانشجومعلم‌ان، سؤالات مربوط به مقایسه یا تعیین احتمال را با سؤالات مربوط به پیش‌بینی دقیق پیشامد بعدی، اشتباه می‌گیرند و بر این باورند که چون در مورد پیشامدهای تصادفی حرف می‌زنیم، نمی‌توان نتیجه را پیش‌بینی کرد و هرچیزی ممکن است اتفاق بیفتد. این گونه پاسخ‌ها در پژوهش Konold et al (1993) مشاهده شده است.

در تبیین نتایج می‌توان اشاره کرد که ریشه محاسبه احتمال به صورت کسر جزء به جزء و کل به جزء، عدم کاربرد صحیح قوانین نسبت و تناسب و نیز عدم توانایی نوشتن تمامی حالات ممکن و مطلوب، بر اساس پژوهش Goya & Hesam (2007) می‌تواند به علت ناقص یا مخدوش بودن طرح‌واره محاسبه و تعیین احتمال باشد. هم‌چنین، در نظر گرفتن قوانین مرتبط با سؤالات ترکیبیات در مورد اهمیت داشتن یا نداشتن ترتیب، اشتباه گرفتن کسر با ترکیب و اشتباه گرفتن سؤالات مربوط به مقایسه احتمال با سؤالات مربوط به تعیین دقیق پیشامد بعدی ممکن است طبق پژوهش Olivier

(1989) به علت تداخل طرح‌واره‌ها یا خطای بازیابی طرح‌واره‌ها رخ داده باشند. به این صورت که ممکن است طرح‌واره‌ی یک موضوع در ذهن افراد باشد، اما در زمان نیاز به آن، طرح‌واره دیگری را در ذهن خود بازیابی کنند. برخی از دانشجومعلم‌ان معتقد بودند هرچه قدر تعداد حالت‌های مطلوب بیش‌تر باشد، احتمال وقوع آن پدیده نیز بیش‌تر می‌شود. این موارد طبق پژوهش Goya & Hesam (2007) می‌تواند به علت تأثیر ساختارهای شهودی رخ داده باشند. Goya & Hesam ابراز می‌دارند شهود، تأثیر چشم‌گیری بر کیفیت طرح‌واره‌های ذهنی فرد دارد. بدین علت، برخی از بدفهمی‌ها در اثر توسعه نیافتگی شهود ایجاد می‌شوند. یکی از علل عملکرد ضعیف دانشجومعلم‌ان در نوشتن تمام حالات ممکن و مطلوب، عدم یادگیری و یا فراموشی مفاهیمی نظیر شمارش و احتمال شرطی در دوره دبیرستان است. افزون بر این، بعضی از دانشجویان بر این باورند که هرچه قدر تعداد حالت‌های مطلوب بیش‌تر باشد، احتمال وقوع آن پدیده نیز بیش‌تر می‌شود. طبق پژوهش Doosti & Reyhani (2015) این نتیجه می‌تواند به علت عدم درک مفهوم کسر به عنوان نسبت باشد.

همان‌طور که در سرفصل‌های دروس ریاضی دوره کارشناسی رشته آموزش ابتدایی به ارائه پیشنهاد توسط دانشجومعلم‌ان برای رفع بدفهمی‌ها اشاره شده است (ص ۳۸۱)، انتظار می‌رود اساتید این دروس، ضمن آشنایی با بدفهمی‌های احتمالاتی، موقعیت‌ها و فعالیت‌هایی را طراحی کنند که دانشجومعلم‌ان با قرارگرفتن در این موقعیت‌ها و مقایسه همزمان پاسخ‌های درست با پاسخ‌های دارای بدفهمی، از اشتباهات خود آگاه شوند. از آنجایی که این بدفهمی‌ها ممکن است در میان دانش‌آموزان نیز وجود داشته باشد، دانشجومعلم‌ان پس از آشنایی با این موارد به نحوه اصلاح آن‌ها در دانش‌آموزان بپردازند.

گفتنی است، عدم همکاری دانشجومعلم‌ان و برخی از اساتید دانشگاه فرهنگیان برای اجرای آزمون، محدودیتی بود که پژوهشگران با آن مواجه شدند. در نهایت، باید گفت احتمال، موضوعی است که در کشور، کم‌تر مورد توجه پژوهشگران حوزه آموزش ریاضی قرار گرفته است. لذا شکاف‌های پژوهشی متعددی در این حوزه از ریاضیات به چشم می‌خورد. به عنوان نمونه، بررسی راهکارهای بهبود آموزش احتمال، بررسی میزان درک معلم‌ان از مبحث احتمال و راهکارهای پیشنهادی آنان در رفع بدفهمی‌ها و بررسی راهکارهای بهبود توانایی نوشتن حالات ممکن و مطلوب در محاسبه احتمال، می‌تواند موضوعات مناسبی برای پژوهش‌های آینده تعریف کنند.

References

- Arican, M., & Kuzu, O. (2020). Diagnosing preservice teachers' understanding of statistics and probability: Developing a test for cognitive assessment. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18, 771-790.
- Azimpour, Sohrab and Vahedi, Hossein (2021). Misunderstandings among elementary school students regarding probability. *Quarterly Journal of Research in Mathematics Education*, 2(3), 109-116. [Persian]
- Bakhshalizadeh, Shahnaz and Boroujerdian, Naser (2017). Identifying common misconceptions of fourth grade elementary school students in the content area of geometry and measuring and comparing their performance with the average performance at the international level. *Journal of Educational Innovations*, 16(64), 101-126. [Persian]
- Batanero, C., & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Springer.
- Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S., & Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability* (p. 33). Springer Nature.
- Batanero, C., & Diaz, C. (2012). Training school teachers to teach probability: Reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics*, 3(1), 3-13.

- Chernoff, E. J., & Sriraman B. (2014) (Eds.). *Probabilistic thinking: Presenting plural perspectives*. Springer.
- DeTemple, D. W., Long, C. T., & Millman, R. S. (2015). *Mathematical reasoning for elementary school teachers*. Pearson Education.
- Dollard, C. (2011). Preservice elementary teachers and the fundamentals of probability. *Statistics Education Research Journal*, 10(2), 27-47.
- Doosti, Malihe; Reyhani, Ebrahim (2015). Identifying misunderstandings, strategies, and reasoning of sixth grade students in solving fraction problems. *Quarterly Journal of Research in Education*, 4(4), 41-59. [Persian]
- Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal of Research in Mathematics Education*, 28(1), 96-105.
- Goya, Zahra and Hessam, Abdullah (2005). The role of schema in the formation of students' mathematical misunderstandings. *Journal of Mathematical Education Development*, 22(82), 4-15. [Persian]
- Higher Education Development and Planning Council. (2020). Curriculum for the Bachelor's Degree in Elementary Education. [Persian]
- Hirsch, L.S., & O'Donnell, A.M. (2001). Representativeness in statistical reasoning: Identifying and assessing misconceptions. *Journal of Statistics Education*, 9(2), 96-105.
- Hokor, E. K. (2020). Pre-Service Teachers' Probabilistic Reasoning in Constructivist Classroom. *Pedagogical Research*, 5(2), em0053.
- Jahanipour, Ruhollah (1998). *Probability*/ Fatemi Publications. [Persian]
- Jones, D. L., & Tarr, J. E. (2007). An examination of the levels of cognitive demand required by probability tasks in middle grades mathematics textbooks. *Statistics Education Research Journal*, 6(2), 4-27.
- Kahaki Ali, Reyhani Ebrahim and Bahrami Samani Ehsan (2019). Assessment of understanding and understanding of Eighth Grade Students of Probability. *Andishe* 2019; 24 (1) :57-80 [Persian]
- Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, 6(1), 59-98.
- Konold, C., Pollatsek, A., Well, A., Lohmeier, J., & Lipson, A. (1993). Inconsistencies in students' reasoning about probability. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(5), 392-414.
- Kvatinsky, T., & Even, R. (2002). Framework for teacher knowledge and understanding about probability. In *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics (CD)*. Cape Town, South Africa: International Statistical Institute.
- Lee, H. S., Sanei, H., Famularo, L., Masters, J., Bradshaw, L., & Schellman, M. (2023). Validating a concept inventory for measuring students' probabilistic reasoning: The case of reasoning within the context of a raffle. *The Journal of Mathematical Behavior*, 71, 101081.
- Li, J. (2000). *Chinese students' understanding of probability* (Doctoral dissertation).
- Li, J., & Mendoza Pereira, L. (2002). Misconceptions in probability. In *Proceedings of the sixth international conference on teaching statistics, Developing a statistically literate society*.
- Michael, J., (2002). Misconceptions-What students think they know. *Advances in physiology education*. 26 (1), 4-6.
- Mirzaeian, Javad (2020). *Investigating the understanding and comprehension of 11th grade mathematics students about probability and its misunderstanding*. Master's thesis in Mathematics Education, Saveh Institute of Higher Education, Science and Technology. [Persian]
- Nabbout-Cheiban, M. (2017). Intuitive thinking and misconceptions of independent events: A case study of US and French pre-service teachers. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 3, 255-282.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Odafe, V. U. (2011). Pre-Service Teachers' Conceptions of Probability. *PRIMUS*, 21(7), 592-605.
- Olivier, A. (1989). Handling pupils' misconceptions. *Pythagoras*, 21, 10-19.

- Rabbani, Sanaz (2014). *Students' conceptual errors in conditional probability*. Master's thesis in mathematics education, Shahid Rajaee University. [Persian]
- Rezaei, Mani (2012). Characteristics of Syntactic Thinking and Its Place in School Curriculum, *Iranian Journal of Curriculum Studies*, 26, 33-58. [Persian]
- Secretariat of the Supreme Council of Education. (2012). National Curriculum of the Islamic Republic of Iran. Tehran: Ministry of Education Publications. [Persian]
- Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, 297–324, Springer.
- Tversky, A., & Kaheman, D. (1974). Judgment under uncertainty: heuristics and biases. *Science*, 185, 1124–1131.